УДК 517
ББК 22.161.1
К88

Кудрявцев Л. Д. **Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды**: Учебник. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 400 с. — ISBN 5-9221-0184-6.

Излагаются традиционные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, теория рядов.

Второе издание — 1998 г.

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей.

Ил. 128.

Рецензенты:
заведующий кафедрой общей математики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, академик *В.А. Ильин*;
профессор МФТИ, академик *С.М. Никольский*.

ISBN 5-9221-0184-6 (Т. 1)
ISBN 5-9221-0183-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 2

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ГЛАВА 3

РЯДЫ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основе настоящего учебника лежит классический метод изложения материала, характерный для математических дисциплин, т. е. метод, при котором ни одно принципиально важное для построения курса утверждение, требующее доказательства, не остается без такового. Автору представляется, что изложение математической дисциплины, при которой ряд фактов (часто основополагающих) принимается без доказательства, затрудняет изучение предмета и активное использование его в дальнейшем. В качестве оправдания такого "нестрогого" изложения обычно приводится довод о невозможности в отведенные учебным планом часы дать обоснованное изложение всего материала. Однако в высших учебных заведениях, в которых на курс математики отводится 350–510 часов, вопросы математического анализа можно изложить неформально, с общепринятой в математике строгостью. Один из возможных путей такого изложения без отказа от наглядности и обстоятельности предлагается в данном курсе. В полном объеме весь материал, содержащийся в учебнике, можно подробно в умеренном темпе рассказать за 75 лекций (каждая из двух частей по 40 минут). Это подтверждается многолетним опытом чтения автором курса математического анализа на различных факультетах Московского физико-технического института.

Некоторые вопросы, рассматриваемые в учебнике, отмечены звездочкой. Это означает, что их целесообразнее разобрать не на лекциях, а на семинарских занятиях, или предоставить студентам самостоятельно ознакомиться с ними. Во-первых, это вопросы, касающиеся напоминания некоторых понятий элементарной математики, известных из курса средней школы. Во-вторых, это вопросы, которые можно исключить из лекций без нарушения логической завершенности курса, что имеет смысл сделать в том случае, когда эти вопросы не входят в обязательную программу (например, в случае, когда на курс высшей математики отводится 350 часов). К ним относятся счетность рациональных и несчетность иррациональных чисел, теорема о записи действительных чисел бесконечными десятичными дробями, элементы теории функций комплексного переменного, теория обобщенных

функций и т. п.

В первую лекцию целесообразно включить пп. 2.1, 2.2, 4.1 и 4.2. Тем самым первая лекция будет завершаться доказательством теоремы о существовании точной верхней грани у ограниченного сверху числового множества, которая является одной из фундаментальных теорем, лежащих в основе математического анализа.

Существенное отличие предлагаемого учебника от большинства других состоит в изложении теории предела функции. В основе этого изложения лежит рассмотрение предела функции в точке не только по ее проколотой окрестности, а по любому множеству, содержащемуся в области задания функции. Это позволяет изучать свойства функций глубже, чем при рассмотрении предела только по проколотой окрестности. В учебнике определение предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ числовой функции f, заданной на множестве X, формулируется, например, в терминах последовательностей следующим образом: для любой последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, имеет место $f(x_n) \to a$, $n = 1, 2, \ldots$ При этом допускаются оба случая, $x_0 \in X$ и $x_0 \notin X$, а тем самым при таком определении предела функции не предполагается, что $x_n \neq x_0$. Это упрощает формулировки и доказательства теорем (по сравнению с обычным определением здесь одним условием меньше), что особенно хорошо видно на примере теоремы о пределе сложной функции и позволяет наглядно и убедительно показать, что в математике дискретное является частным случаем непрерывного. Подробный сравнительный анализ с точки зрения различных определений предела функции содержится в статье L.D. Kudryavtsev “Introducihg limits at the undergraduate level” (Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 1992, V. 23, №4, 517–523).

Автор старался отобрать минимальное количество вопросов, которые все вместе составляют логически завершенное изложение курса математического анализа, освоив который, студент сможет активно использовать его методы для решения задач и будет достаточно хорошо подготовлен для изучения других математических курсов.

Чтобы не отвлекать читателя от основного содержания учебника, иногда опускаются доказательства, представляющие собой техническое усложнение тех, которые имеются в курсе. Например, формула интегрирования по частям доказывается для непрерывно дифференцируемых функций, а для непрерывных и кусочно непрерывно дифференцируемых формулируется без доказательства. Лишь для функций многих переменных имеются отдельные исключительные случаи, когда доказательство теоремы в приведенной общей формулировке требует существенного развития методов, примененных при ее доказательстве в тексте при более сильных ограничениях. Это относится прежде всего к теоремам Грина и Гаусса–Остроградского для произвольных областей с кусочно гладкой границей.

Автор выражает свою глубокую благодарность рецензентам первого и второго издания учебника академикам РАН В.А. Ильину и С.М. Никольскому, члену-корреспонденту РАН С.И. Похожаеву, профессору А.М. Седлецкому, доцентам Л.А. Кузнецову, В.П. Пикулину и научному редактору доценту В.Н. Седову, а также редактору издательства “Альфа” М.Д. Жабцевой, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим много полезных замечаний, которые все были учтены при окончательном редактировании текста, что, безусловно, содействовало улучшению предлагаемого учебника.

Особую признательность автор испытывает к академику С.М. Никольскому, члену-корреспонденту РАН О.В. Бесову и профессору С.А. Теляковскому, с которыми в продолжение многих лет читает в МФТИ курс математического анализа студентам параллельных потоков. Постоянные обсуждения с ними содержания курса и методики изложения материала нашло свое воплощение при освещении ряда вопросов в предлагаемом учебнике.

В третьем издании по-новому изложен рад вопросов дифференциального и интегрального исчисления функции многих переменных. Автор выражает свою искреннюю благодарность студентам МФТИ В. Акимову, А. Малашевичу и А. Чудновскому, сделавшим ряд полезных замечаний к тексту и составившим список опечаток в предыдущих изданиях этой книги, исправленных в настоящем издании.

ГЛАВА 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Функции и множества

1.1. Множества. Напомним некоторые обозначения, часто употребляемые в математике, и дополним их некоторыми новыми, быть может, не встречавшимися раньше читателю. Большими буквами, как правило, будем обозначать множества: A, B, C, X, Y, ..., а малыми — их элементы: a, b, c, x, y, ... и т. д. Запись $A = \{a, b, c, ...\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c, ..., а запись $A = \{x : ...\}$ или $A = \{x | ...\}$ означает, что множество A состоит из всех таких элементов x, которые удовлетворяют условию, написанному после двоеточия или соответственно после вертикальной черты (двоеточие и вертикальная черта в этом случае читаются как "таких что").

Отметим следующее: запись $A = \{a\}$ может означать либо, что множество A состоит из одного элемента a, либо, что оно состоит из множества каких-то элементов, каждый из которых обозначен буквой a. Какой именно из указанных двух случаев имеет место, будет всегда ясно из контекста.

Через $a \in A$ и $A \ni a$ обозначается принадлежность элемента a множеству A, а $a \notin A$ или $A \not\ni a$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Для удобства вводится понятие пустого множества, которое обозначается символом $\varnothing$. *Пустое множество* не содержит элементов. Символы $A \subset B$ и $B \supset A$ выражают собой включение множества A в множество B. В этом случае множество A называется *подмножеством* множества B. В частности, здесь возможен случай $A = B$. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством* множества B.

Символом $A \cup B$ обозначается *объединение* множеств A и B; т. е. множество всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B, символом $A \cap B$ — *пересечение* множеств A и B, т. е. множество всех элементов, принадлежащих одновременно A и B; символом $A \setminus B$ — *разность* множеств A и B, т. е. множество всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B (рис. 1).

В случае семейства множеств $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое

множество индексов α, символом $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ обозначается объединение всех множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, а символом $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ — их пересечение.

Вместо слов "существует", "найдется", "имеется" в логических формулах употребляется символ $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова exist — существовать), называемый *символом существования*, а вместо слов "любой", "каждый", "произвольный", "какой бы ни" — символ $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова all — "все"), называемый *символом всеобщности.* Так, запись $\exists x$ читается "существует x", а запись $\forall x$ — "любое x" или "для любого x" или "для всех x". Соответственно запись $\exists x$, $\exists y$, или, короче, $\exists x, y$ означает "существуют x и y", а запись $\forall x$, $\forall y$, или, короче, $\forall x, y$ — "любые x и y" или "для любых x и y".

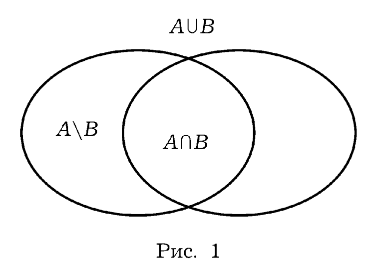


Рис. 1

Знак $\Rightarrow$ означает "следует", "вытекает", а знак $\Leftrightarrow$ — "равносильно". В этих обозначениях формула

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

означает, что утверждение "множество A является подмножеством множества B" равносильно утверждению "из того, что элемент x принадлежит множеству A, следует, что он принадлежит множеству B". Символ $\overset{\text{def}}{=}$ означает определение выражения, стоящего слева от этого символа (def — первые три буквы английского слова definition, что означает "определение"). Например, определение объединения $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ и пересечения $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ системы множеств A_α можно записать в виде формул следующим образом:

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ \exists \alpha,\ x \in A_\alpha\}, \quad \bigcap_{\alpha} A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ \forall \alpha\ \ x \in A_\alpha\}.$$

Определение часто используемого в математике символа $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ для обозначения суммы слагаемых a_k можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Знак тождества между двумя уже ранее введенными символами означает, что они обозначают один и тот же объект. Например,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Наконец, символами ▷ и ◁ будут отмечаться начало и конец доказательства высказываемого утверждения.

1.2. Функции. Наряду с понятиями множества и элемента в математике первичным понятием является понятие соответствия. Это понятие неявным образом присутствует и в понятии множества, поскольку понятие множества предполагает, что каждый элемент данного множества обладает определенным свойством, отличающим его от элементов, не входящих в это множество. Иначе говоря, каждому из рассматриваемых элементов поставлено в соответствие некоторое свойство, позволяющее судить о том, является этот элемент элементом данного множества или нет.

Среди всевозможных соответствий важную роль в математике играют соответствия, называемые функциями. Опишем эти соответствия.

Пусть заданы непустые множества X и Y. Соответствие, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует единственый элемент $y \in Y$, называется *функцией*, заданной (определенной) на множестве X со значениями в множестве Y, или *отображением множества X в множество Y*. Такая функция (такое отображение) обозначается с помощью некоторой буквы, например, буквы f, одним из следующих способов:

$$y = f(x),\ x \in X, \quad \text{или} \quad f\colon\ X \to Y, \quad \text{или} \quad f\colon\ x \mapsto y,\ x \in X,\ y \in Y.$$

Наряду с терминами "функция", "отображение" употребляются равнозначные термины "преобразование", "морфизм".

Элемент $x \in X$ называется *независимым переменным* или *аргументом*, а соответствующий элемент $y \in Y$ — *зависимым переменным.* Множество X называется *множеством задания* (*определения*) функции f, а множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, — *множеством значений* функции f и обозначается Y_f. Очевидно, $Y_f \subset Y$. Если $Y_f = Y$, то отображение f называется *отображением X на множество Y* или *сюрьекцией.* Если при $x \neq x'$ выполняется неравенство $f(x) \neq f(x')$, то отображение f называется *взаимно однозначным отображением X* в Y или *инъекцией.* Если f является взаимно однозначным отображением X на Y, т. е. является одновременно сюръекцией и инъекцией, то оно называется *биекцией.*

Если задано отображение $f\colon\ X \to Y$, то элементы множеств X и Y часто называются *точками.*

Символом $f(x)$ обозначается как сама функция, так и элемент, соответствующий элементу x при этой функции. Обозначение одним и тем же символом $f(x)$ как самой функции, так и ее значения в точке x не приводит к недоразумениям, так как всегда из контекста ясно, о чем идет речь.

Значение функции f в точке x_0 обозначается также $f(x)\big|_{x_0}$.

Если $f\colon X \to Y$ и E — подмножество множества X, то функция $f_E\colon E \to Y$, такая, что для каждого $x \in E$ выполняется равенство

$$f_E(x) = f(x), \tag{1.1}$$

называется *сужением функции f на множество E*. Таким образом, сужение f_E функции f принимает в точках x множества E те же значения, что и функция f. Иногда сужение f_E функции f обозначают тем же символом f, что и саму исходную функцию, и называют *функцией f на множестве E*.

Пусть заданы функция $f\colon X \to Y$ и $A \subset X$. Множество всех $y \in Y$, являющихся значениями функции f в точках $x \in A$, называется *образом множества A при отображении f* и обозначается $f(A)$, т. е.

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{y\colon\ \exists x \in A,\ f(x) = y\}. \tag{1.2}$$

В частности, образ множества X есть множество значений функции: $f(X) = Y_f$.

Если $B \subset Y$, то множество всех тех точек $x \in X$, значения функции f в которых принадлежат множеству B, называется *прообразом множества B*. То есть прообразом множества B является множество

$$\{x\colon\ f(x) \in B\}. \tag{1.3}$$

Пусть Z — некоторое множество и $Y = \mathscr{P}(Z)$ — множество всех его подмножеств. Если $f\colon X \to Y$, то значение $f(x)$ функции f в точке $x \in X$ является в этом случае некоторым подмножеством множества Z: $f(x) \subset Z$. Если среди подмножеств $f(x)$, $x \in X$, имеется по крайней мере одно непустое множество, содержащее более одного элемента, то функция f называется *многозначной функцией*. При этом всякий элемент $z \in Z$, принадлежащий множеству $f(x) \subset Z$, т. е. $z \in f(x)$, часто также называется *значением функции f в точке $x \in X$*.

Если каждое из множеств $f(x)$ состоит только из одного элемента, то функцию f называют *однозначной функцией*.

Пусть $\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X. Функция, определенная на множестве $Y_f = f(X)$ значений функции $f\colon X \to Y$, с областью значений, принадлежащей множеству $\mathscr{P}(X)$, и ставящая в соответствие каждому элементу $y \in Y_f$ его прообраз $\{x\colon f(x) = y\}$, называемся *обратной к f функцией* и обозначается через $f^{-1}\colon Y_f \to \mathscr{P}(X)$. Обратная функция является, вообще говоря, многозначной функцией.

Если отображение f взаимно однозначно (т. е. является инъекцией), то обратная функция является однозначной.

Если отображение f является взаимно однозначным отображением X на Y, то обратное отображение f^{-1} является взаимно однозначным отображением Y на X (т. е. если $f\colon X \to Y$ — биекция, то и

$f^{-1}\colon Y \to X$ — биекция), и поэтому f является в свою очередь отображением, обратным к отображению f^{-1}. Это означает, что при любом $x \in X$ имеет место равенство $f^{-1}f(x) = x$, а при любом $y \in f(X)$ — равенство $ff^{-1}(y) = y$. При этом для заданного инъективного отображения $f\colon\ X \to Y$ каждое из указанных двух условий однозначно определяет обратное отображение f^{-1}.

Если $f\colon\ X \to Y$ и $g\colon\ Y \to Z$, то функция $F\colon\ X \to Z$, ставящая в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $F(x) = g(f(x))$, называется *композицией функций f и g* (иногда — *суперпозицией* этих функций или *сложной функцией*) и обозначается $g \circ f$. Таким образом, согласно определению для каждого $x \in X$ имеет место равенство

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)). \tag{1.4}$$

§ 2. Числа

2.1. Действительные числа. Из элементарной математики известно, что действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить и сравнивать по величине. Перечислим основные свойства, которыми обладают эти операции. Множество всех действительных чисел будем обозначать через R, а его подмножества называть *числовыми множествами.*

I. Операция сложения. Для любой пары действительных чисел a и b определено единственное число, называемое их *суммой* и обозначаемое $a + b$, так, что при этом выполняются следующие условия:

I_1. $a + b = b + a, \quad a, b \in R$.

I_2. $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a, b, c \in R$.

I_3. Существует такое число, называемое *нулем* и обозначаемое 0, что для любого $a \in R$ выполняется условие $a + 0 = a$.

I_4. Для любого числа $a \in R$ существует число, называемое ему *противоположным* и обозначаемое $-a$, для которого $a + (-a) = 0$.

Число $a + (-b)$, $a, b \in R$, называется *разностью* чисел a и b и обозначается $a - b$.

II. Операция умножения. Для любой пары действительных чисел a и b определено единственное число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab, такое, что выполняются следующие условия:

II_1. $ab = ba, \quad a, b \in R$.

II_2. $a(bc) = (ab)c, \quad a, b, c \in R$.

II_3. Существует такое число, называемое *единицей* и обозначаемое 1, что для любого $a \in R$ выполняется условие $a \cdot 1 = a$.

II_4. Для любого числа $a \neq 0$ существует число, называемое ему *обратным* и обозначаемое $\dfrac{1}{a}$ или $1/a$, для которого $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

Число $a \cdot \frac{1}{b}$, $b \neq 0$, называется *частным* от деления a на b и обозначается $a : b$ или $\frac{a}{b}$ или a/b.

III. Связь операций сложения и умножения:

для любых $a, b, c \in R$ выполняется условие $(a+b)c = ac + bc$.

IV. Упорядоченность. Для действительных чисел определено отношение порядка. Оно состоит в следующем.

Для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений: либо $a < b$ (читается "a меньше b"), или, что то же самое, $b > a$ (читается "b больше a"), либо $a > b$, или, что то же самое, $b < a$. При этом предполагается, что выполняются следующие условия:

IV_1. Транзитивность. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

IV_2. Если $a < b$, то для любого числа c имеет место $a + c < b + c$.

IV_3. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Соотношения порядка называют также *сравнением* действительных чисел по величине или *неравенствами*. Запись $a \leqslant b$, равносильная записи $b \geqslant a$, означает, что либо $a < b$, либо $a = b$.

Из выполнения условий IV_2 и IV_3 вытекает одно важное свойство, называемое *плотностью действительных чисел*: для любых двух различных действительных чисел a и b, например, таких, что $a < b$, существует такое число c, что $a < c < b$. В самом деле, сложив каждое из равенств $a = a$, $b = b$ с неравенством $a < b$, получим $2a < a + b < 2b$, откуда $a < \frac{a+b}{2} < b$, т. е. в качестве числа c можно взять $\frac{a+b}{2}$.

Множество действительных чисел обладает еще свойством непрерывности.

V. Непрерывность. Для любых непустых числовых множеств X и Y таких, что для каждой пары чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$, существует число a, удовлетворяющее условию

$$x \leqslant a \leqslant y, \quad x \in X, \quad y \in Y$$

(рис. 2).

Рис. 2

Перечисленные свойства полностью определяют множество действительных чисел в том смысле, что из этих свойств следуют и все остальные его свойства. Поэтому можно дать аксиоматическое определение множества действительных чисел следующим образом.

Определение 1. Множество элементов, обладающих свойствами I–V, содержащее более одного элемента, называется *множеством действительных чисел*, а каждый его элемент — *действительным числом*.

Это определение однозначно задает множество действительных чисел с точностью до конкретной природы его элементов. Оговорка о том, что в множестве содержится более одного элемента, необходима потому, что множество, состоящее из одного только нуля, очевидным образом удовлетворяет условиям I–V.

Числа $1,\ 2 \stackrel{\text{def}}{=} 1+1,\ 3 \stackrel{\text{def}}{=} 2+1,\ \ldots$ и т. д. называются *натуральными числами*, и их множество обозначается N.

Из определения множества натуральных чисел вытекает, что оно обладает следующим характеристическим свойством: *если*

1) $A \subset N$,

2) $1 \in A$,

3) *если для каждого элемента* $x \in A$ *имеет место включение* $x+1 \in A$, *то* $A = N$.

$\triangleright$ Действительно, согласно условию 2) имеем $1 \in A$, поэтому по свойству 3) и $2 \in A$, а тогда согласно тому же свойству получим $3 \in A$. Поскольку любое натуральное число n получается из 1 последовательным прибавлением к ней той же 1, то $n \in A$, т. е. $N \subset A$, а так как по условию 1 выполняется включение $A \subset N$, то $A = N$. $\triangleleft$

На этом свойстве натуральных чисел основан принцип доказательства *методом математической индукции*. Если имеется множество утверждений, каждому из которых приписано натуральное число (его номер) $n = 1, 2, \ldots$, и если доказано, что:

1) справедливо утверждение с номером 1;

2) из справедливости утверждения с любым номером $n \in N$ следует справедливость утверждения с номером $n+1$;

то тем самым доказана справедливость всех утверждений, т. е. любого утверждения с произвольным номером $n \in N$.

Примером доказательства методом математической индукции является доказательство теоремы 1 в п. 2.4.

Числа $0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ называют *целыми числами*, их множество обозначают Z.

Числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n целые, а $n \neq 0$, называются *рациональными числами*. Множество всех рациональных чисел обозначают Q, т. е.

$$Q = \left\{x \in R: \quad x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in Z,\ n \neq 0\right\}.$$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*, их множество обозначается $\boldsymbol{I}$.

Кроме четырех арифметических действий над числами можно производить действия возведения в степень и извлечения корня.

Для любого числа $a \in R$ и натурального n степень a^n определя-

ется как произведение n сомножителей, равных a:

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

По определению $a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $a > 0$, $a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, n — натуральное число.

Пусть $a > 0$, а n — натуральное число. Число b называется *корнем* n-й степени из числа a, если $b^n = a$. В этом случае пишется $b = \sqrt[n]{a}$. Существование и единственность положительного корня любой степени n из любого положительного числа будет доказано ниже в п. 7.3.

Корень четной степени $\sqrt[2k]{a}$, $a \neq 0$, имеет два значения: если $b = \sqrt[2k]{a}$, $k \in N$, то и $-b = \sqrt[2k]{a}$. Действительно, из $b^{2k} = a$ следует, что

$$(-b)^{2k} = ((-b)^2)^k = (b^2)^k = b^{2k}.$$

Неотрицательное значение $\sqrt[n]{a}$ называется его *арифметическим значением.*

Если $r = \dfrac{p}{q}$, где p и q целые, $q \neq 0$, т. е. r — рациональное число, то для $a > 0$

$$a^{p/q} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[q]{a^p}. \tag{2.1}$$

Таким образом, степень a^r определена для любого рационального числа r. Из ее определения следует, что для любого рационального r имеет место равенство

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Степень a^x (число x называется *показателем степени*) для любого действительного числа x получается с помощью непрерывного распространения степени с рациональным показателем (см. об этом в п. 8.2).

Для любого числа $a \in R$ неотрицательное число

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0, \end{cases}$$

называется его *абсолютной величиной* или *модулем.* Для абсолютных величин чисел справедливы неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|, \quad a, b \in R.$$

Они доказываются с помощью свойств I–IV действительных чисел.

2.2. Расширенная числовая прямая. Окрестности. Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой (рис. 3). Поэтому совокупность действительных чисел часто называют числовой прямой или числовой осью, а отдельные числа — ее точками. В связи с этим иногда вместо $a < b$ (соответственно вместо $b > a$) говорят, что точка a лежит левее точки b (точка b лежит правее точки a).

0 a 1 b

Рис. 3

Часто бывает удобно дополнить множество действительных чисел элементами, обозначаемыми через $+\infty$ и $-\infty$ и называемыми соответственно *плюс бесконечностью* и *минус бесконечностью*, считая при этом по определению, что для любого числа $x \in R$ выполняется неравенство

$$-\infty < x < +\infty. \tag{2.2}$$

Множество действительных чисел R, дополненное элементами $+\infty$ и $-\infty$, называется *расширенным* множеством действительных чисел (расширенной числовой прямой) и обозначается $\overline{R}$.

Иногда бывает удобно дополнить множество действительных чисел R одним элементом ∞ (бесконечностью без знака), в этом случае бесконечность ∞ уже не связана соотношением порядка с действительными числами. Бесконечности $+\infty$, $-\infty$ и ∞ называются также бесконечно удаленными точками числовой прямой, в отличие от ее остальных точек, которые называются конечными точками числовой прямой.

Напомним определения некоторых важных типов подмножеств расширенной числовой прямой $\overline{R}$. Пусть $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$, $a \leqslant b$. Множество

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ x \in \overline{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется *отрезком*, множество

$$(a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ x \in R,\ a < x < b\}$$

— *интервалом*, множества

$$[a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ x \in \overline{R},\ a \leqslant x < b\},$$

$$(a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ x \in \overline{R},\ a < x \leqslant b\}$$

— *полуинтервалами*, а все они — *промежутками* расширенной числовой оси. Точки a и b называются *концами* этих промежутков, а точки x такие, что $a < x < b$, — их *внутренними точками.* Если a и b — числа, $a \leqslant b$, то число $b - a$ называется *длиной* соответствующего промежутка, а сам промежуток называется *конечным.*

Важным для дальнейшего является понятие окрестности конечной или бесконечно удаленной точки числовой прямой.

Если $a \in R$, т. е. когда a является действительным числом, то для любого $\varepsilon > 0$ ε-окрестностью $U(a, \varepsilon)$ числа a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т. е.

$$U(a,\ \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon).$$

В случае $a = +\infty$

$$U(+\infty,\ \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (1/\varepsilon,\ +\infty],$$

а в случае $a = -\infty$

$$U(-\infty,\ \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} [-\infty,\ -1/\varepsilon)$$

(рис. 4).

$a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$ $-\infty<a<+\infty$; 0 $+1/\varepsilon$ $a=+\infty$; $-1/\varepsilon$ 0 $a=-\infty$

Рис. 4

Таким образом, во всех случаях с убыванием ε соответствующая окрестность точки a уменьшается. Всякая ε-окрестность конечной или бесконечно удаленной точки $a \in \overline{R}$ называется ее окрестностью. Иногда окрестность обозначается просто $U(a)$.

Важным свойством точек расширенной прямой, следующим непосредственно из определения их окрестностей, является то, что *у двух любых различных точек расширенной числовой прямой имеются непересекающиеся окрестности* (рис. 5).

Нужным бывает и понятие окрестности для бесконечности без знака ∞. Ее ε-окрестность, $\varepsilon > 0$, определяется равенством (рис. 6)

$$U(\infty, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\colon\ x \in R,\ |x| > 1/\varepsilon\} \cup \{\infty\}.$$

Легко убедиться, что пересечение двух окрестностей точки (конечной или бесконечно удаленной) является также окрестностью этой точки.

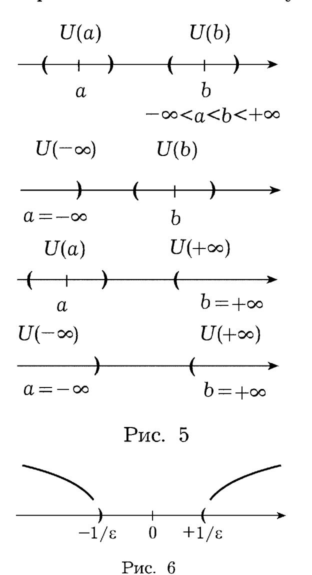


Рис. 5

Рис. 6

2.3. Комплексные числа. Рассмотрим элементы вида $x + yi$, где x и y — действительные числа, а i — некоторый элемент, называемый *мнимой единицей* (см. с. 25).

Элемент $z = x + yi$ называют *комплексным числом*, x — его *действительной*, а y — *мнимой частью* и пишут

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z^{*}).$$

Два комплексных числа считаются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

*) От латинских слов realus — действительный, imaginarius — мнимый.

Вместо $x + 0i$ и $0 + yi$ пишут соответственно x и yi, в частности, $0 + 0i = 0$; вместо $1i$ пишут i. Число $x + yi$, у которого $y \neq 0$, называют *существенно комплексным числом*, а число вида yi, $y \neq 0$, — *чисто мнимым.*

Множество всех комплексных чисел обозначают через C.

Арифметические операции. С помощью операций сложения и умножения действительных чисел в множестве комплексных чисел также можно ввести операции сложения и умножения.

Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ их сумма $z_1 + z_2$ определяется как комплексное число, действительная и мнимая части которого получаются в результате сложения соответственно действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2:

$$z_1 + z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Для определения произведения комплексных чисел сначала определим квадрат мнимой единицы:

$$i^2 \equiv ii \stackrel{\text{def}}{=} -1,$$

а затем — произведение двух произвольных комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ как результат почленного умножения $x_1 + y_1 i$ на $x_2 + y_2 i$ с использованием соотношения $i^2 = -1$ и последующего сложения полученных результатов:

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 x_2 + y_1 x_2 i + x_1 y_2 i + y_1 y_2 i^2 = \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \quad (2.3)$$

Замечание. При определении умножения комплексных чисел можно было бы предварительно не определять, что $i^2 = -1$, и не использовать правила почленного умножения, а сразу определить произведение по формуле (2.3). Тогда из нее бы уже следовало, что $i^2 = -1$. В самом деле,

$$ii = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) \underset{(2.3)}{=} -1.$$

Вычитание определяется как действие, обратное сложению: $z = z_1 - z_2$, если $z_1 = z_2 + z$, а деление — как действие, обратное умножению: $z = z_1/z_2$, $z_2 \neq 0$, если $z_1 = z_2 z$.

Определенные указанным образом арифметические операции над комплексными числами удовлетворяют группам аксиом I, II, III, п. 2.1.

Теперь можно сформулировать более полное и более точное определение множества комплексных чисел C.

Определение 2. Множество всех элементов $x + yi$, в котором заданы операции сложения, вычитания, умножения и деления согласно выше сформулированным правилам, называется *множеством*

комплексных чисел, а каждый его элемент — *комплексным числом.*

Обозначение $x + yi$ комплексных чисел называется их *алгебраической формой записи.*

Векторная интерпретация. Каждому комплексному числу $z = x + yi$ соответствует упорядоченная пара действительных чисел $(x,\ y)$, и наоборот, каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x,\ y)$ соответствует комплексное число $z = x + yi$, и эти соответствия взаимно однозначны. С упорядоченными же парами действительных чисел $(x,\ y)$ на плоскости (при фиксированной системе декартовых координат) находятся во взаимно однозначном соответствии векторы этой плоскости, имеющие числа x и y своими координатами. В результате комплексное число $z = x + yi$ можно рассматривать как вектор на плоскости с координатами x, y. Этот вектор мы будем обозначать той же буквой $z = (x,\ y)$ (рис. 7).

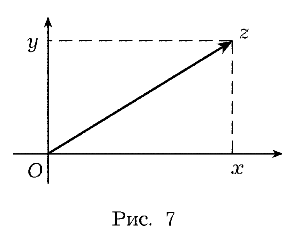


Рис. 7

Целесообразность такой интерпретации комплексных чисел следует из того, что при сложении комплексных чисел складываются и соответствующие им векторы: при сложении векторов их координаты складываются, поэтому суммой векторов $z_1 = (x_1,\ y_1)$ и $z_2 = (x_2,\ y_2)$ является вектор

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),$$

т. е. вектор, соответствующий сумме $z_1 + z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ (рис. 8).

Поскольку вычитание как для комплексных чисел, так и для векторов является действием, обратным сложению, то при вычитании комплексных чисел соответствующие им векторы также вычитаются (рис. 9).

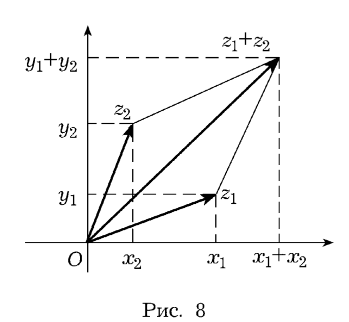


Рис. 8

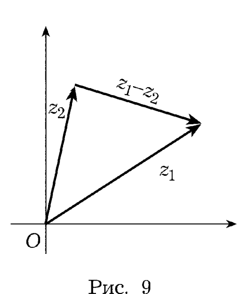


Рис. 9

Координатная плоскость, векторы $z = (x,\ y)$ которой интерпретируются как комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ее ось x — *действительной осью*, а ось y — *мнимой.*

Длина $|z|$ вектора $z = (x,\ y)$ называется *модулем* или *абсолютной величиной комплексного числа* $z = x + yi$. Очевидно,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.4}$$

Поскольку длина каждой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон, а абсолютная величина разности длин двух сторон треугольника не меньше длины третьей стороны, то для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место неравенства (см. рис. 8 и рис. 9)

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$
$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|. \tag{2.5}$$

Аргумент комплексного числа. Если φ — угол, образованный ненулевым вектором z с действительной осью, то всякий угол вида $\varphi + 2\pi n$, где n — целое число, и угол только такого вида, также будет углом, образованным вектором z с действительной осью.

Множество всех углов, которые образует ненулевой вектор $z = (x,\ y)$ с действительной осью, называется *аргументом комплексного числа* $z = x + yi$ и обозначается $\arg z$. Каждый элемент этого множества называется *значением аргумента числа* z (рис. 10).

Часто для краткости вместо "значение аргумента" говорят "аргумент" и обозначают его тем же символом $\arg z$, что и все множество (подобно тому, как в теории неопределенных интегралов множество всех первообразных данной функции f обозначается тем же символом $\int f(x)\,dx$, что и произвольный элемент этого множества; см. п. 28.1).

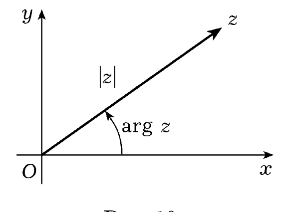


Рис. 10

Поскольку ненулевой вектор плоскости однозначно определяется своей длиной и углом, который он образует с осью x, то два комплексных числа, отличные от нуля, равны тогда и только тогда, когда равны их абсолютные величины и аргументы.

Если на значения аргумента φ числа z наложить, например, условие $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или условие $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, то значение аргумента будет определено однозначно. Это ограничение, однако, как мы в этом убедимся в дальнейшем, не всегда удобно.

Из определения аргумента следует, что $\operatorname{tg}\varphi = y/x$. Здесь при $x = 0$, $y \neq 0$ считается $y/0 = \infty$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Действительная и мнимая части комплексного числа $z = x + yi \neq 0$ выражаются через его модуль $r = |z|$ и аргумент φ следующим образом:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{2.6}$$

Отсюда
$$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2.7}$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой записи комплексного числа* z. Мы будем ее употреблять и для $z = 0$; в этом случае $r = 0$, а φ может принимать любое значение — аргумент числа 0 не определен. Итак, всякое комплексное число можно записать в тригонометрической форме.

Ясно также, что если комплексное число z записано в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \geqslant 0$, то число r является его модулем (ибо $r = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$), а φ — одним из значений его аргумента.

Запись операций умножения, деления и возведения в степень в тригонометрической форме. Тригонометрическую форму записи комплексных чисел бывает удобно использовать при перемножении комплексных чисел, в частности, она позволяет выяснить геометрический смысл произведения комплексных чисел.

Найдем формулы для умножения и деления комплексных чисел при тригонометрической форме их записи. Если
$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
то по правилу умножения комплексных чисел получим
$$z_1 z_2 = \\ = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\ = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их абсолютные величины перемножаются, а аргументы складываются:
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{2.8}$$
(второе равенство является равенством двух множеств). Отметим, что эту простую формулу для аргумента произведения комплексных чисел нельзя было бы написать, если бы мы с самого начала ограничились однозначным выбором аргументов комплексных чисел, например, с помощью неравенств
$$-\pi < \arg z \leqslant \pi, \tag{2.9}$$
так как сумма $\arg z_1 + \arg z_2$ могла бы уже не удовлетворять этому неравенству, хотя $\arg z_1$ и $\arg z_2$ ему удовлетворяли.

Применив последовательно формулы (2.8) к произведению n комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, получим
$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|,$$
$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n.$$

Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, то из полученных равенств следует, что
$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n\arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{2.10}$$

Следует обратить внимание на то, что вторая формула (2.10) представляет собой равенство множеств: если φ — какое-либо значение аргумента числа z и, следовательно, $n\varphi$ — значение аргумента z^n, то левая часть равенства состоит из всех чисел вида

$$n\varphi + 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

а правая — из всех чисел вида

$$n(\varphi + 2\pi m) + 2\pi k = n\varphi + 2\pi(nm + k),$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Нетрудно убедиться, что эти два множества состоят из одних и тех же чисел. Отсюда видно, что $\arg z^n \neq n \arg z$, так как здесь правая часть состоит лишь из чисел вида $n(\varphi + 2\pi m) = n\varphi + 2\pi nm$, т. е. таких чисел, которые получаются прибавлением к числу $n\varphi$ не всевозможных чисел вида $2\pi m$, т. е. чисел, кратных 2π, а лишь чисел, кратных числу $2\pi n$.

Отметим еще, что формула (2.10) равносильна утверждению: если $\varphi \in \arg z$, то

$$n\varphi \in \arg z^n. \tag{2.11}$$

Поэтому если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{2.12}$$

Отсюда для комплексного числа, абсолютная величина которого равна 1 (следовательно, оно имеет вид $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$), получаем

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Муавра* *).

Если $z = z_1/z_2$, $z_2 \neq 0$, т. е. $z_1 = z_2 z$, то $|z_1| = |z_2||z|$ и $\arg z_1 = \arg z_2 + \arg z$. Таким образом,

$$|z| = |z_1|/|z_2|, \quad \arg z = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Иначе говоря, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Извлечение корня. Если n — натуральное число, $z \in C$, то *корнем n-й степени* $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z называется такое число w, что

$$w^n = z. \tag{2.13}$$

Например, числа i и $-i$ являются корнями степени 2 (квадратными корнями) из числа $z = -1$, так как $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$. На этом примере уже видно, что число $\sqrt[n]{z}$ определено неоднозначно: для $z = -1$ может быть $\sqrt{-1} = i$, а может быть и $\sqrt{-1} = -i$. При

*) А. Муавр (1667–1754) — английский математик.

этом, в отличие от области действительных чисел, когда можно было рассматривать положительные и отрицательные значения корня, говорить о знаке корня в комплексной области нельзя, так как существенно комплексные числа не разбиваются на положительные и отрицательные: у существенно комплексного числа “нет знака”. Поэтому при употреблении записи $\sqrt[n]{z}$, $z \in C$, всегда надо отдавать себе отчет в том, что именно в рассматриваемом случае обозначает собой символ $\sqrt[n]{z}$.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$, то

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) \underset{\substack{(2.13)\\(2.12)}}{=} r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда $\rho^n = r$, а следовательно, $\rho = \sqrt[n]{r}$, где корень n-й степени понимается в арифметическом смысле, т. е. $\rho \geqslant 0$, и

$$n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

или

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\,k.$$

Для того чтобы получить все возможные различные значения корней n-й степени, здесь достаточно ограничиться лишь значениями $k = 0, 1, ..., n-1$:

$$\psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\,k, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2.14}$$

так как при $k = n$ получим $\psi_n = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi$, т. е. значение аргумента ψ_n отличается от значения аргумента $\psi_0 = \dfrac{\varphi}{n}$ на 2π и при остальных значениях k будут получаться значения угла ψ, отличающиеся от одного из значений ψ_k, $k = 0, 1, ..., n-1$, на кратное числа 2π, а поэтому соответствующее значение корня будет совпадать с одним из чисел

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\psi_k + i\sin\psi_k), \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{2.15}$$

Таким образом, корень n-й степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n значений w_k, $k = 0, 1, ..., n-1$, для которых справедливы формулы (2.14) и (2.15). Все значения корня $\sqrt[n]{z}$ имеют одинаковые модули $\sqrt[n]{r}$, а аргумент ψ_k корня w_k получается из аргумента ψ_{k-1} корня w_{k-1}, $k = 1, 2, ..., n-1$, так же, как и аргумент $\psi_0 = \varphi/n$ корня w_0, — из аргумента ψ_{n-1} корня w_{n-1} прибавлением числа $2\pi/n$. Отсюда следует, что если начало всех векторов w_k, $k = 0, 1, ..., n-1$, поместить в начало координат, то их концы будут находиться в вершинах правильного n-угольника. На рис. 11 изображены корни $\sqrt[6]{-1}$.

Сопряженные комплексные числа. Для каждого комплексного числа $z = x + yi$ число $x - yi$ называется ему *сопряженным* и обозначается $\overline{z}$. Геометрический вектор $\overline{z}$ симметричен с вектором z

относительно действительной оси (рис. 12).

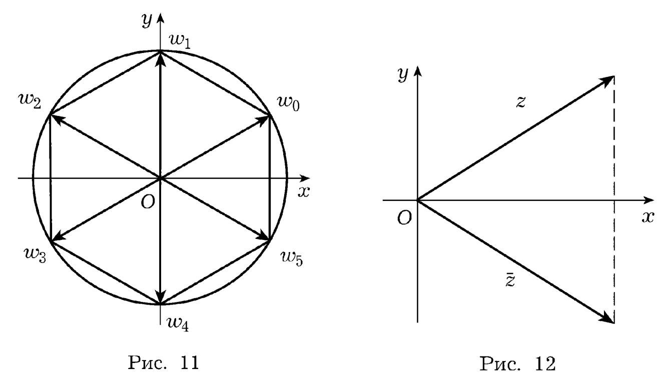


Рис. 11 Рис. 12

Перечислим основные свойства сопряженных чисел.

1°. $|\overline{z}| = |z|$, $\arg\overline{z} = -\arg z$.

2°. $z\overline{z} = |z|^2$.

3°. $\overline{\overline{z}} = z$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

5°. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$.

6°. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

7°. $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$.

Докажем 1°: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{z}|$; если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$, и потому $\arg\overline{z} = -\arg z$.

Докажем 2°: $z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Так же просто доказывается $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + yi}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$.

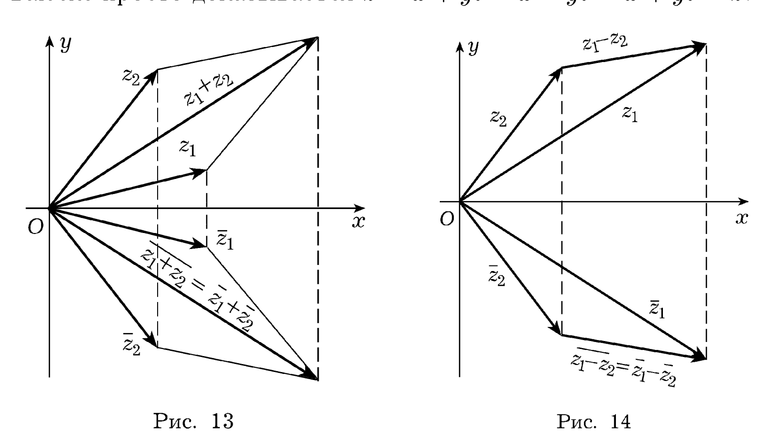


Рис. 13 Рис. 14

Свойства 4° и 5° вытекают из симметричности сопряженных чисел относительно действительной оси (рис. 13 и рис. 14), из которой

следует, что число $\overline{z_1 + z_2}$ симметрично с $z_1 + z_2$, а число $\overline{z_1 - z_2}$ симметрично с $z_1 - z_2$.

Проверим теперь, что в формуле 6° абсолютные величины и аргументы чисел, стоящих в левой и правой частях равенства, равны:

$$|\overline{z_1 z_2}| \underset{1^\circ}{=} |z_1 z_2| \underset{(2.8)}{=} |z_1||z_2| \underset{1^\circ}{=} |\overline{z}_1||\overline{z}_2| \underset{(2.8)}{=} |\overline{z}_1 \overline{z}_2|,$$

$$\arg(\overline{z_1 z_2}) \underset{1^\circ}{=} -\arg(z_1 z_2) \underset{(2.8)}{=} -(\arg z_1 + \arg z_2) =$$
$$= -\arg z_1 - \arg z_2 = \arg \overline{z}_1 + \arg \overline{z}_2 \underset{(2.8)}{=} \arg(\overline{z}_1 \overline{z}_2).$$

Аналогично доказывается свойство 7°.

Используя сопряженные комплексные числа, можно получить формулу для частного комплексных чисел в алгебраической форме: умножив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}$ на число $x_2 - y_2 i$, сопряженное знаменателю, получим

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\, i.$$

При построении теории комплексных чисел мы исходили из того, что комплексным числом называют объекты вида $z = x + yi$, где x и y — действительные числа, а i — некоторый новый элемент, называемый мнимой единицей. Этому определению можно легко придать строго логическую форму следующим образом.

Назовем комплексным числом упорядоченную пару $(x,\ y)$ действительных чисел x и y. Операции сложения и умножения для двух комплексных чисел $(x,\ y)$ и (x', y') определим по формулам

$$(x,\ y) + (x', y') = (x + x',\ y + y'), \tag{2.16}$$

$$(x,\ y)(x', y') = (xx' - yy',\ xy' + x'y). \tag{2.17}$$

Комплексные числа вида $(x, 0)$ будем обозначать просто символом x:

$$(x, 0) = x, \tag{2.18}$$

а комплексное число $(0, 1)$ — символом i. Из формулы (2.17) следует, что

$$i^2 \equiv i \cdot i = (0, 1)(0, 1) \underset{(2.17)}{=} (-1, 0) = -1.$$

Для любого комплексного числа (x, y) имеет место легко проверяемое тождество $(x,\ y) = x + yi$. В самом деле,

$$(x,\ y) \underset{(2.16)}{=} (x, 0) + (0, y) \underset{(2.17)}{=} (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \underset{(2.18)}{=} x + yi.$$

Таким образом, мы пришли к первоначальной записи комплексных чисел.

2.4. Перестановки и сочетания. Пусть задано конечное множество элементов. Выясним, сколькими различными способами можно упорядочить элементы этого множества.

Определение 3. Группы элементов, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками этих элементов.*

Число всевозможных перестановок n элементов обозначается P_n. Как это будет ниже показано, оно равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Для краткости это произведение обозначают символом $n!$ (читается "эн факториал"), т. е. $n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Для удобства полагают

$$0! = 1. \tag{2.19}$$

Пример 1. Группы $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$ и $\{3, 2, 1\}$ являются всевозможными перестановками элементов 1, 2 и 3.

Лемма. *Если P_k — число всех перестановок из k элементов и $k > 1$, то*

$$P_k = kP_{k-1}. \tag{2.20}$$

▷ Множество всех перестановок из заданных k элементов разбивается на группы, в каждой из которых на первом месте стоит один и тот же элемент. Число таких групп равно k — числу всех элементов.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на последующих $k-1$ местах могут располагаться оставшиеся $k-1$ элементов в любом порядке. Поэтому число перестановок в каждой группе равно P_{k-1}.

Каждая перестановка из k элементов попадает в одну из описанных групп и в точности один раз. Поэтому для числа P_k всех перестановок из k элементов имеет место соотношение (2.20). ◁

Теорема 1. *Число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$:*

$$P_n = n!. \tag{2.21}$$

▷ Докажем теорему методом математической индукции. Если $n = 1$, то, очевидно, $P_1 = 1 = 1!$. Если для некоторого $k \in N$ имеет место формула $P_k = k!$, то согласно лемме $P_{k+1} \underset{(2.20)}{=} (k+1)P_k = (k+1)k! = (k+1)!$. ◁

Выясним теперь, сколько подмножеств, содержащих m элементов, имеет множество, состоящее из n элементов, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Определение 4. Каждое множество, содержащее m элементов из числа n заданных, называется *сочетанием из n элементов по m.*

Подчеркнем, что сочетание определено как множество некоторых элементов без рассмотрения порядка, в котором они расположены.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m.

Пример 2. Множества $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ образуют всевозможные сочетания из трех элементов $1,2,3$ по два.

Из определения сочетаний вытекают следующие два свойства.

1°. *Имеет место формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0,1,2,...,n, \tag{2.22}$$

где

$$C_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1. \tag{2.23}$$

$\triangleright$ Действительно, если из n элементов выбрать какое-либо сочетание, содержащее k элементов, то элементы, не вошедшие в него, составят сочетание из $n-k$ элементов. Причем, таким путем получатся все сочетания из n элементов по $n-k$ и каждое по одному разу. Поэтому число сочетаний из n элементов по k, т. е. C_n^k, равняется числу сочетаний из n элементов по $n-k$, т. е. числу C_n^{n-k}. $\triangleleft$

2°. *Имеет место формула*

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{2.24}$$

$\triangleright$ Пусть дано $n+1$ элементов. Зафиксируем один из элементов и разобьем все сочетания по $k+1$ элементов на две группы: содержащие этот элемент и не содержащие его. Число первых равно C_n^k (ибо если удалить фиксированный элемент из каждого содержащего его сочетания по $k+1$ элементов, то получатся всевозможные сочетания из n элементов по k и каждое по одному разу), число вторых равно C_n^{k+1} (ибо они образуют всевозможные сочетания по $k+1$ элементов из n элементов, получающихся удалением фиксированного элемента из $n+1$ заданных). Это и означает справедливость формулы (2.24). $\triangleleft$

Докажем теперь формулу для числа всевозможных сочетаний из n элементов по m.

Теорема 2. *Для числа сочетаний имеет место формула*

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}}. \tag{2.25}$$

$\triangleright$ Множество всех перестановок из заданных n элементов разбивается на группы, в каждой из которых на m первых местах стоят одни и те же элементы (в том или ином порядке), а следовательно, и на последних $n-m$ местах также находятся одни и те же элементы. Число таких групп равно числу способов, которыми из данных n элементов можно выбрать m элементов, т. е равно числу C_n^m.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на m первых местах выбранные элементы могут быть расположены любым способом, а число таких способов равно числу P_m всевозможных перестановок из m элементов. Элементы же, стоящие на $n-m$ последних местах, также могут находиться в любом порядке, т. е. из них может быть образована любая перестановка из $n-m$ элементов, а число таких перестановок равно P_{n-m}.

Таким образом, число перестановок в каждой группе равно $P_m P_{n-m}$, и поскольку число всех групп равно C_n^m, причем каждая перестановка из n заданных элементов входит только один раз в одну из указанных групп, то для числа всех перестановок P_n получаем формулу

$$P_n = C_n^m P_m P_{n-m},$$

из которой и следует формула (2.25). ◁

Следствие.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (2.26)$$

▷ Формула (2.26) вытекает из формулы (2.25) в силу равенства (2.21). ◁

Отметим, что формулы (2.22) и (2.24) можно доказать, подставив в них значения сочетаний согласно формуле (2.26) и проведя в случае формулы (2.24) нужные вычисления. Однако приведенные выше доказательства раскрывают смысл формул и дают возможность получить их, не зная заранее, как они выглядят.

Числа C_n^k можно последовательно находить с помощью следующей треугольной таблицы, называемой *треугольником Паскаля**), в которой первые и последние числа во всех строчках равны единице, и, начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки:

```
        1
      1 2 1
     1 3 3 1
    1 4 6 4 1
  1 5 10 10 5 1
.......................
```

В силу формулы (2.24) в n-й строчке будут стоять числа

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^k,\ \ldots,\ C_n^n.$$

2.5. Формула бинома Ньютона**). Многочлены, являющиеся суммой двух слагаемых, называются *биномами*. Формула для n-й степени бинома $x + a$

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n \qquad (2.27)$$

называется формулой *бинома Ньютона*.

---

*) Б. Паскаль (1623–1662) — французский философ, писатель, физик и математик.

**) И. Ньютон (1643–1727) — английский физик, механик, астроном, математик и теолог.

Применив символ $\sum$ для обозначения суммы и вспомнив, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, формулу (2.27) можно записать в виде

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k}. \tag{2.28}$$

$\triangleright$ Для доказательства (2.28) рассмотрим произведение n биномов

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n). \tag{2.29}$$

Открыв скобки, получим

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = x^n + (a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1} + \\ + (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)x^{n-2} + \ldots + a_1a_2\ldots a_n. \tag{2.30}$$

Коэффициент при x^{n-1} является суммой всевозможных сочетаний из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по одному элементу, поэтому число слагаемых равно C_n^1. Коэффициент у x^{n-2} является суммой произведений элементов всевозможных сочетаний из тех же элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по два элемента, а следовательно, число слагаемых равно C_n^2. Вообще, коэффициент x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, является суммой произведений элементов всевозможных сочетаний из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по k элементов, и поэтому число таких слагаемых равно C_n^k .

Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, то из формулы (2.30) следует, что

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^k a^k x^{n-k} + \ldots + a^n,$$

т. е. формула (2.27) доказана. $\triangleleft$

Замечание. Положив в формуле (2.28) $x = a = 1$, получим $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, а положив $x = 1$, $a = -1$, получим $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

§ 3. Элементарные функции

3.1. Числовые функции. Если функции принимают числовые значения (такие функции называются *числовыми* или *скалярными*), то над ними можно производить арифметические операции. Пусть даны две функции $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$, где X — произвольное множество, а Y — подмножество множества комплексных чисел C (в частности, действительных чисел R); тогда значения суммы $f+g$, разности $f-g$, произведения fg и частного $\frac{f}{g}$ функций f и g по определению в каждой точке $x \in X$ задаются следующими формулами:

$$(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \quad (fg)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g(x),$$

$$(f-g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Конечно, в последней формуле предполагается, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $g(x) \neq 0$.

Значение функции f в точке x_0, как это отмечалось в п. 1.2, обозначается символами $f(x_0)$, $f(x)\big|_{x_0}$. Символ $f(x)\big|_a^b$ означает разность значений функции f в точках b и a:

$$f(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} f(b) - f(a). \tag{3.1}$$

Функция f, заданная на подмножестве X числовой прямой, называется *периодической с периодом* $T > 0$, если для любого $x \in X$ выполняются условия

$$x \pm T \in X \quad \text{и} \quad f(x+T) = f(x). \tag{3.2}$$

Значение функции f в точке x_0 называется *наибольшим*, если для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, и *наименьшим*, если имеет место неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Если функция f задана на подмножестве X числовой оси и принимает действительные значения, то ее *графиком* называется множество на координатной плоскости, состоящее из всех точек вида $(x, f(x))$, $x \in X$ (*координатной плоскостью* называется плоскость, на которой задана некоторая прямоугольная декартова система координат). Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно обратны: $g = f^{-1}$, то их графики симметричны относительно биссектрис первого и третьего координатных углов (эти биссектрисы, очевидно, составляют прямую линию).

В ближайших параграфах будут рассматриваться только функции, у которых как их значения, так и значения их аргументов являются действительными числами (если, конечно, не будет специально оговорено что-либо другое).

3.2. Понятие элементарной функции. Функции:
постоянная $y = c$ (c — константа);
степенная $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$;
показательеая $y = a^x$, $a > 0$;
логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
$y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$;
называются *основными элементарными функциями.*

Всякая функция f, которая может быть задана с помощью формулы $y = f(x)$, содержащей лишь конечное множество арифметических операций над основными элементарными функциями и композиций, называется *элементарной функцией.*

В множестве элементарных функций выделяются следующие классы.

1. *Многочлены* (*полиномы*), или, подробнее, алгебраические многочлены (полиномы), — функции вида

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{3.3}$$

Многочлены определены на всей числовой оси.

Если $a_n \neq 0$, то целое неотрицательное число n называется *степенью многочлена* $P(x)$. Функция, тождественно равная нулю, является в силу данного определения многочленом, который называется *нулевым многочленом.* Степень многочленов обладает тем свойством, что при перемножении ненулевых многочленов степень произведения равна сумме степеней сомножителей (см. п. 3.3*). Чтобы это свойство сохранялось и при умножении на нулевой многочлен, степенью нулевого многочлена называется минус бесконечность $(-\infty)$. По определению полагается, что сумма $-\infty$ и любого числа снова равна $-\infty$: $-\infty + x \stackrel{\text{def}}{=} x + (-\infty) \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$, $x \in R$, и $-\infty + (-\infty) \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$. Напомним еще (см. (2.2)), что $-\infty$ меньше любого числа x: $-\infty < x$.

2. *Рациональные функции* (*рациональные дроби*)— функции $f(x)$, представимые в виде

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{3.4}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены ($Q(x)$ — ненулевой многочлен). Функция $f(x)$ определена во всех точках числовой оси, кроме тех ее точек, в которых знаменатель $Q(x)$ обращается в нуль.

3. *Иррациональные функции*, т. е. такие функции, не являющиеся рациональными, которые могут быть заданы композицией конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий.

4. *Трансцендентные функции* — элементарные функции, не являющиеся рациональными или иррациональными.

Все перечисленные функции можно рассматривать и в комплексной области (т. е. когда их аргументы и их значения могут быть комплексными числами), но, конечно, в этом случае функции w^z, $\log_z w$, $\sin z$, $\cos z$, $z \in C$, $w \in C$, требуют специальных определений (см. п. 41.4).

3.3*. Многочлены. Для изучения ряда свойств многочленов в действительной области, т. е. функций вида

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и x — действительные числа, оказывается целесообразным рассмотреть более общие функции: многочлены в комплексной области, т. е. функции вида

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{3.5}$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ и z — комплексные числа. Числа $a_0, a_1, ..., a_n$ называются *коэффициентами многочлена* $P(z)$. Если $a_n \neq 0$, то, как и выше, неотрицательное целое число n называется *степенью многочлена* $P(z)$, который в этом случае обозначают иногда $P_n(z)$.

Два многочлена, $P(z)$ *и*

$$Q(z) = b_m z^m + ... + b_1 z + b_0, \tag{3.6}$$

равны тогда и только тогда, когда

$$m = n, \quad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad ..., \quad a_n = b_n. \tag{3.7}$$

$\triangleright$ В самом деле, если выполняются эти равенства, то ясно, что многочлены (3.5) и (3.6) принимают одинаковые значения при всех $z \in C$.

Наоборот, пусть при всех z справедливо равенство

$$a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 = b_m z^m + ... + b_1 z + b_0. \tag{3.8}$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $m = n$, так как при $m \neq n$ можно добавить недостающие члены с нулевыми коэффициентами. Перенесем в равенстве (3.8) все члены в одну сторону и положим

$$\lambda_0 = a_0 - b_0, \quad \lambda_1 = a_1 - b_1, \quad ..., \quad \lambda_n = a_n - b_n. \tag{3.9}$$

В результате получим, что для всех $z \in C$ выполняется равенство

$$\lambda_0 + \lambda_1 z + ... + \lambda_n z^n = 0. \tag{3.10}$$

В частности, это равенство имеет место для произвольно фиксированных $n+1$ значений $z_1, ..., z_{n+1}$, отличных друг от друга: $z_i \neq z_j$, $i, j = 1, 2, ..., n+1$. Подставим $z_1, ..., z_{n+1}$ в равенство (3.10). Получим систему $n+1$ линейных уравнений относительно $n+1$ неизвестных $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$

$$\lambda_0 + \lambda_1 z_k + ... + \lambda_n z_k^n = 0, \quad k = 1, 2, ..., n+1, \tag{3.11}$$

с определителем

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & ... & z_1^n \\ 1 & z_2 & z_2^2 & ... & z_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & z_{n+1} & z_{n+1}^2 & ... & z_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Из курса алгебры известно, что этот определитель, называемый *определителем Вандермонда**), равен произведению всевозможных разностей $z_j - z_i$, $j > i$, и, следовательно, не равен нулю. Поэтому система (3.11) имеет единственное решение

$$\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{n+1} = 0.$$

*) А. Вандермонд (1735–1796) — французский математик.

Отсюда, в силу формулы (3.9), следует, что для коэффициентов многочленов (3.5) и (3.6) действительно имеют место равенства (3.7). ◁

Сумма и произведение двух многочленов являются, очевидно, также многочленами. Чтобы перемножить два многочлена, достаточно перемножить их почленно и полученные результаты сложить:

$$P(z)Q(z) \underset{\substack{(3.5)\\(3.6)}}{=} a_n b_m z^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) z^{n+m-1} + \ldots + a_0 b_0.$$

Из этой формулы видно, что если ни один из перемножаемых многочленов не нулевой, то степень их произведения равна сумме их степеней. Если же по крайней мере один из них нулевой, то это свойство сохраняется в силу того, что степень нулевого многочлена равна $-\infty$ (см. п. 3.2).

Если степень многочлена $P(z)$ не меньше степени многочлена $Q(z)$, то существуют единственные многочлены $S(z)$ и $R(z)$ такие, что

$$P(z) = S(z)Q(z) + R(z), \tag{3.12}$$

где степень многочлена $R(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$. При этом степень многочлена $S(z)$ равна разности степеней многочленов $P(z)$ и $Q(z)$.

Многочлен $S(z)$ называется *частным* от деления многочлена $P(z)$ на $Q(z)$, а многочлен $R(z)$ — *остатком.* Если $R(z) = 0$, то говорят, что $P(z)$ *делится на* $Q(z)$.

Существование и единственность многочленов $S(z)$ и $R(z)$, удовлетворяющих соотношению (3.12) при заданных многочленах (3.5) и (3.6), $b_m \neq 0$, можно доказать методом неопределенных коэффициентов.

▷ Запишем многочлены $S(z)$ и $R(z)$ в виде

$$R(z) = c_{m-1} z^{m-1} + \ldots + c_1 z + c_0,$$
$$S(z) = c_n z^{n-m} + \ldots + c_{m+1} z + c_m.$$

Подставим эти формулы в равенство (3.12):

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \\ = (c_n z^{n-m} + \ldots + c_{m+1} z + c_m)(b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0) + \\ + c_{m-1} z^{m-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \tag{3.13}$$

произведем почленное умножение, сложим получившиеся результаты, сделаем приведение подобных членов и приравняем коэффициенты в левой и правой частях равенства при одинаковых степенях z. В результате получится система из $n+1$ линейных уравнений относительно $n+1$ неизвестных

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{m-1},\ c_m,\ \ldots,\ c_n. \tag{3.14}$$

Можно показать, что эта система имеет единственное решение, и даже найти его в явном виде методом математической индукции. В самом деле, для определения коэффициента c_n из равенства (3.13) получаем одно уравнение

$$a_n = c_n b_m, \quad b_m \neq 0.$$

Далее возможны два случая: $m < n$ и $m = n$. Если $m < n$, то для коэффициента c_{n-1} из равенства (3.13) получается уравнение

$$a_{n-1} = c_{n-1} b_m + c_n b_{m-1},$$

в котором все коэффициенты, кроме c_{n-1}, известны. Если же $m = n$, то $S(z) = c_n$, а $R(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1}$, и для коэффициента c_{n-1} из (3.13) получаем уравнение

$$a_{n-1} = c_n b_{n-1} + c_{n-1}.$$

Таким образом последовательно и однозначно находятся все коэффициенты (3.14). $\triangleleft$

3.4. Разложение многочленов на множители. Число $z_0 \in C$ называется *корнем многочлена* $P(z)$, если

$$P(z_0) = 0.$$

Поделив многочлен $P(z)$ степени n на $z - z_0$ (здесь z_0 не обязательно корень $P(z)$), получим

$$P(z) = Q(z)(z - z_0) + r, \tag{3.15}$$

где $Q(z)$ — многочлен степени $n - 1$, а остаток от деления r — постоянная: $r \in C$.

Если в равенстве (3.15) положить $z = z_0$, то получим

$$r = P(z_0), \tag{3.16}$$

т. е. *остаток от деления многочлена $P(z)$ на $z - z_0$ равняется значению этого многочлена в точке $z = z_0$*. Это утверждение называется *теоремой Безу**).

Если z_0 — корень многочлена $P(z)$, то из равенства (3.16) следует, что $r = 0$. Наоборот, если $r = 0$, то из (3.16) имеем $P(z_0) = 0$. Таким образом, *число z_0* является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на $z - z_0$.

В курсе алгебры доказывается, что *всякий многочлен степени, равной единице, или более высокой имеет корень* (основная теорема алгебры).

Пусть $P_n(z)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$ и z_1 — его корень. Тогда, согласно теореме Безу, многочлен $P_n(z)$ можно представить в виде

$$P_n(z) = (z - z_1) Q_{n-1}(z),$$

*) Э. Безу (1730–1783) — французский математик.

где Q_{n-1} — многочлен степени $n-1$. При этом либо $Q_{n-1}(z_1) \neq 0$, либо $Q_{n-1}(z_1) = 0$. Во втором случае, снова согласно теореме Безу, многочлен $Q_{n-1}(z_1)$ можно представить в виде

$$Q_{n-1}(z_1) = (z - z_1)Q_{n-2}(z),$$

где $Q_{n-2}(z)$ — многочлен уже степени $n-2$. В результате в этом случае

$$P_n(z) = (z - z_1)^2 Q_{n-2}(z),$$

т. е. многочлен $P_n(z)$ делится на $(z - z_1)^2$.

Целое неотрицательное число k_1 называется ***кратностью корня z_1 многочлена $P_n(z)$***, если этот многочлен делится на $(z - z_1)^{k_1}$ и не делится на $(z - z_1)^{k_1+1}$.

Однократный корень называется *простым*, а корень кратности, большей единицы, — *кратным*.

Если z_1 является корнем кратности k_1 многочлена $P_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, то, применяя последовательно теорему Безу, получим

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0$$

($Q_{n-k_1}(z)$ — многочлен степени $n - k_1$). Согласно основной теореме алгебры многочлен $Q_{n-k_1}(z)$ при $n - k_1 \geqslant 1$ имеет корень. Обозначим его через z_2, и пусть его кратность равна k_2; тогда

$$Q_{n-k_1}(z) = (z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(x), \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0,$$

и, следовательно,

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z).$$

Продолжив последовательно этот процесс, через конечное число шагов (каждый раз степень многочлена понижается) получим

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_N)^{k_N}, \tag{3.17}$$

где $z_j \neq z_l$ при $j \neq l$, $j, l = 1, 2, \ldots, N$. Ясно, что $k_1 + \ldots + k_N = n$. Числа $z_1, z_2, \ldots, z_N$ и только они являются корнями многочлена $P_n(z)$.

Для многочлена $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ положим

$$\overline{P}_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a}_n z^n + \ldots + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0.$$

Многочлен $\overline{P}_n(z)$ называется многочленом, сопряженным многочлену $P_n(z)$. В силу свойств сопряженных комплексных чисел будем иметь

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \\ = \overline{a}_n \overline{z}^n + \overline{a}_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \ldots + \overline{a}_1 \overline{z} + \overline{a}_0 = \overline{P}_n(\overline{z}).$$

Если z_0 — корень кратности k для многочлена $P_n(z)$, то $\overline{z}_0$ является корнем той же кратности сопряженного многочлена $\overline{P}_n(z)$. Действительно, если

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

то

$$\overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k Q_{n-k}(z)}, \quad \overline{Q_{n-k}(z_0)} \neq 0,$$

откуда

$$\overline{P}_n(z) = \overline{P_n(\overline{z})} = \overline{(\overline{z} - z_0)^k Q_{n-k}(\overline{z})} = (z - \overline{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(z),$$

причем,

$$\overline{Q}_{n-k}(\overline{z}_0) = \overline{Q_{n-k}(z_0)} \neq 0.$$

Это и означает, что $\overline{z}_0$ — корень кратности k многочлена $\overline{P}_n(z)$.

Пусть теперь коэффициенты многочлена $P_n(z)$ — действительные числа. Тогда ясно, что $\overline{P}_n(z) = P_n(z)$, и если $z_0 = a + bi$ — корень кратности k такого многочлена $P_n(z)$, то и $\overline{z}_0 = a - bi$ — корень кратности k этого же многочлена, так как он совпадает со своим сопряженным.

В дальнейшем в случае многочлена с действительными коэффициентами будем вместо переменной z писать, как это обычно принято, переменную x.

Заметим, что

$$(x - z_0)(z - \overline{z}_0) = (x - a - bi)(z - a + bi) = (x - a)^2 + b^2 = \\ = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \quad (3.18)$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ и, следовательно,

$$\frac{p^2}{4} - q = -b^2 < 0 \quad (3.19)$$

при $b \neq 0$, т. е. когда $z_0 = a + bi$ является существенно комплексным числом.

Теперь мы видим, что если в разложении (3.17) многочлена с действительными коэффициентами объединить скобки с сопряженными корнями согласно формуле (3.18) и обозначить действительные корни $x_1, x_2, ..., x_r$, то получим разложение вида

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} ... (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} ... (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s},$$

или, короче,

$$P_n(x) = a_n \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{k_j} \prod_{l=1}^{s} (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}, \quad (3.20)$$

где
$$\sum_{j=1}^{r} k_j + 2\sum_{l=1}^{s} m_l = n \tag{3.21}$$
(при перемножении многочленов их степени складываются),
$$\frac{p_l^2}{4} - q_l < 0, \quad l = 1, 2, ..., s$$
(это следует из (3.19)), p_l, q_l — действительные числа, а k_j и m_l — натуральные, $j = 1, 2, ..., r$, $l = 1, 2, ..., s$.

3.5. Рациональные дроби. Как в случае многочленов, мы рассмотрим рациональные дроби в комплексной области.

Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены с, вообще говоря, комплексными коэффициентами и $Q(z)$ не является нулевым многочленом. Рациональная дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$, и *неправильной*, если степень многочлена $P(z)$ не меньше степени многочлена $Q(z)$.

Всякая рациональная дробь является либо правильной, либо неправильной.

Если рациональная дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ неправильная, то, произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, т. е. представив числитель в виде
$$P(z) = S(z)Q(z) + R(z),$$
где $S(z)$ и $R(z)$ — некоторые многочлены, причем степень многочлена $R(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$, получим
$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}.$$
Здесь в силу уже сказанного дробь $\frac{R(z)}{Q(z)}$ является правильной.

Займемся более подробно изучением правильных рациональных дробей.

Лемма 1. *Если $\frac{P(z)}{Q(z)}$ — правильная рациональная дробь и число $z_0 \in C$ является корнем кратности $k \geqslant 1$ ее знаменателя, т. е.*
$$Q(z) = (z - z_0)^k Q_1(z), \quad Q_1(z_0) \neq 0, \tag{3.22}$$
то существуют единственное число $A \in C$ и многочлен $P_1(z)$ такие, что
$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z - z_0)^k} + \frac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1}Q_1(z)}, \tag{3.23}$$

где дробь $\dfrac{P_1(z)}{(z-z_0)^{k-1}Q_1(z)}$ *также является правильной.*

Если коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ — действительные числа и корень z_0 многочлена $Q(z)$ — также действительное число, то число A также является действительным числом, а многочлены $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ можно выбрать с действительными коэффициентами.

Отметим, что здесь у многочленов $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ единица является просто индексом, а не их степенью.

▷ Каково бы ни было число $A \in C$, прибавляя к дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{P(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)}$ дробь $\dfrac{A}{(z-z_0)^k}$, а затем вычитая ее, получим

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)} = \frac{A}{(z-z_0)^k} + \left[\frac{P(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)} - \frac{A}{(z-z_0)^k}\right] = \frac{A}{(z-z_0)^k} + \frac{P(z) - AQ_1(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)}. \quad (3.24)$$

Степень многочлена $P(z)$ по условию меньше степени многочлена $Q(z) = (z-z_0)^k Q_1(z)$, а степень многочлена $Q_1(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$, поскольку $Q(z)$ получается из $Q_1(z)$ умножением на многочлен $(z-z_0)^k$, $k \geqslant 1$. Поэтому при любом выборе числа $A \in C$ дробь

$$\frac{P(z) - AQ_1(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)} \quad (3.25)$$

является правильной: степень ее числителя меньше степени знаменателя.

Для того чтобы дробь (3.25) имела вид

$$\frac{P_1(z)}{(z-z_0)^{k-1} Q_1(z)}, \quad (3.26)$$

необходимо и достаточно, чтобы ее можно было сократить на множитель $(z-z_0)$, а это можно сделать в том и только том случае, когда числитель дроби (3.25) делится на $(z-z_0)$, что согласно теореме Безу равносильно тому, что число z_0 является корнем многочлена, стоящего в числителе этой дроби, т. е. когда

$$P(z_0) - AQ_1(z_0) = 0.$$

Поскольку по условию $Q_1(z_0) \neq 0$, то это равносильно тому, что

$$A = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}. \quad (3.27)$$

При таком и только таком выборе числа A дробь (3.25) сократится на $(z-z_0)$, в результате в этом и только этом случае после сокращения дроби (3.25) получится дробь вида (3.26). Подставив эту дробь в равенство (3.24), получим разложение (3.23), в котором коэффициент A однозначно определен.

Если корень z_0, а также коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ являются действительными числами, то из равенства (3.22) следует, что и многочлен $Q_1(z)$ имеет действительные коэффициенты. Поэтому в силу формулы (3.27) число A оказывается действительным, откуда следует, что и все коэффициенты многочленов, стоящих в числителе дроби (3.25), — также действительные числа. Следовательно, сокращая эту дробь на множитель $(z - z_0)$, имеющий действительные коэффициенты, можно записать результат в виде рациональной дроби, у которой в числителе и знаменателе стоят многочлены с действительными коэффициентами. ◁

Теорема 1. *Если* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *— правильная рациональная дробь и*

$$Q(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_N)^{k_N}, \tag{3.28}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_N$ *— попарно различные корни многочлена* $Q(z)$, *то существуют единственные комплексные числа* $A_j^{(1)}$, $A_j^{(2)}$, $\ldots, A_j^{(k_j)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, *такие, что*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{A_j^{(1)}}{z - z_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(z - z_j)^2} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(z - z_j)^{k_j}} \right]. \tag{3.29}$$

▷ Применив последовательно k_1 раз лемму к дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ при $z_0 = z_1$, получим

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1^{(k_1)}}{(z - z_1)^{k_1}} + \frac{P_1(z)}{(z - z_1)^{k_1 - 1}Q_1(z)} =$$
$$= \frac{A_1^{(k_1)}}{(z - z_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(k_1 - 1)}}{(z - z_1)^{k_1 - 1}} + \frac{P_2(z)}{(z - z_1)^{k_1 - 2}Q_2(z)} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{A_1^{(k_1)}}{(z - z_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(k_1 - 1)}}{(z - z_1)^{k_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{z - z_1} + \frac{P^*(z)}{Q^*(z)},$$

где комплексные числа $A_1^{(k_1)}, \ldots, A_1^{(1)}$ определяются последовательно единственным образом, $P^*(z)$ и $Q^*(z)$ — многочлены, причем $\dfrac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ — правильная рациональная дробь и

$$Q^*(z) = (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_N)^{k_N}.$$

Применив теперь аналогичным образом последовательно k_2 раз лемму 1 к дроби $\dfrac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ при $z_0 = z_2$, затем k_3 раз при $z_0 = z_3$ и т. д., k_N раз при $z_0 = z_N$, получим формулу (3.29). ◁

Докажем еще одну лемму для правильных рациональных дробей, в числителях и знаменателях которых стоят многочлены с действительными коэффициентами.

Лемма 2. *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, причем $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.*

Если число $z_0 = x_0 + y_0 i$, $x_0 \in R$, $y_0 \in R$, $y_0 \neq 0$, является корнем кратности $m \geqslant 1$ многочлена $Q(x)$, т. е.

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x), \tag{3.30}$$

где

$$Q_1(z_0) \neq 0, \quad x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \overline{z}_0), \tag{3.31}$$

то существуют такие единственные действительные числа B, C и многочлен $P_1(x)$ с действительными коэффициентами, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}, \tag{3.32}$$

где дробь

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)} \tag{3.33}$$

также является правильной.

▷ Для любых действительных B и C имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{(3.30)}{=} \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} =$$
$$= \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \left[\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} - \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}\right] =$$
$$= \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)}. \tag{3.34}$$

Рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве леммы 1, легко убедиться, что дробь

$$\frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} \tag{3.35}$$

является правильной и что коэффициенты многочленов, стоящих у нее в числителе и знаменателе, являются действительными.

Для того чтобы дробь (3.35) имела вид

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}, \tag{3.36}$$

необходимо и достаточно, чтобы ее можно было сократить на множитель $x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \overline{z}_0)$, а это можно сделать тогда и только тогда, когда числитель дроби (3.35) делится на $(x - z_0)(x - \overline{z}_0)$, что согласно теореме Безу равносильно тому, что число z_0 является корнем многочлена, стоящего в числителе дроби (3.35), т. е. когда

$$P(z_0) - (Bz_0 + C)Q_1(z_0) = 0.$$

Поскольку $Q_1(z_0) \neq 0$, то
$$Bz_0 + C = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}. \tag{3.37}$$

Пусть $\dfrac{P(z_0)}{Q_1(z_0)} = a + bi$. Тогда равенство (3.37) можно записать следующим образом:
$$B(x_0 + y_0 i) + C = a + bi.$$

Приравняв действительные и мнимые части комплексных чисел, стоящих в разных частях этого равенства, получим $B = \dfrac{b}{y_0}$, $C = a - \dfrac{x_0}{y_0}\,b$. При таком выборе B и C они, во-первых, являются действительными числами, во-вторых, в этом и только этом случае число z_0, а следовательно, и сопряженное ему число $\overline{z}_0$, являются корнями многочлена (3.37). При таком и только таком выборе чисел B и C дробь (3.35) сократится на $(x - z_0)(x - \overline{z}_0)$. В результате в этом и только этом случае после сокращения дроби (3.35) получится дробь вида (3.36). Подставив эту дробь в равенство (3.34) вместо дроби (3.35), получим разложение (3.32), в котором действительные коэффициенты B и C однозначно определены. ◁

Теорема 2. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь,* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— многочлены с действительными коэффициентами. Если*
$$Q(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - x_j)^{k_j} \prod_{l=1}^{s}(x^2 + p_l x + q_l)^{m_l},$$
где x_j *— попарно различные действительные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* k_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, *а* $x^2 + p_l x + q_l = (x - z_l)(x - \overline{z}_l)$, *где* z_l, $\overline{z}_l$ *— попарно различные существенно комплексные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* m_l, $l = 1, 2, \ldots, s$, *то существуют единственные действительные числа*
$$A_j^{(1)},\ A_j^{(2)},\ \ldots,\ A_j^{(k_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$
$$B_l^{(1)},\ B_l^{(2)},\ \ldots,\ B_l^{(m_l)}, \quad C_l^{(1)},\ C_l^{(2)},\ \ldots,\ C_l^{(m_l)}, \quad l = 1, 2, \ldots, s,$$
такие, что
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{A_j^{(1)}}{x - x_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(x - x_j)^2} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x - x_j)^{k_j}}\right) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{s}\left(\frac{B_l^{(1)} + C_l^{(1)}x}{x^2 + p_l x + q_l} + \frac{B_l^{(2)} + C_l^{(2)}x}{(x^2 + p_l x + q_l)^2} + \ldots + \frac{B_l^{(m_l)} + C_l^{(m_l)}x}{(x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}}\right). \tag{3.38}$$

▷ Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1, сначала последовательно применим лемму 1 k_1 раз при $z_0 = x_1$,

затем k_2 раз при $z_0 = x_2$ и т. д., k_r раз при $z_0 = x_r$. В результате получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{A_j^{(1)}}{x-x_j} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x-x_j)^{k_j}}\right) + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}, \qquad (3.39)$$

где действительные числа $A_j^{(1)}$, ..., $A_j^{(k_j)}$ определяются последовательно единственным образом, коэффициенты многочленов $P^*(x)$, $Q^*(x)$ — действительные числа, $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ — правильная рациональная дробь, а

$$Q^*(x) = \prod_{l=1}^{s}(x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}.$$

Применив к дроби $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ последовательно лемму 2 m_1 раз при $z_0 = z_1$, затем m_2 раз при $z_0 = z_2$ и т. д., m_s раз при $z_0 = z_s$, получим

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \sum_{l=1}^{s}\left(\frac{B_l^{(1)} + C_l^{(1)}x}{x^2 + p_l x + q_l} + \ldots + \frac{B_l^{(m_l)} + C_l^{(m_l)}x}{(x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}}\right).$$

Подставив это выражение для $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ в (3.39), получим доказываемую формулу (3.38). ◁

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad \text{и} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0, \quad m \in N, \quad n \in N,$$

называются *элементарными*, поэтому теоремы 1 и 2 называются теоремами о разложении правильных рациональных дробей на сумму элементарных (соответственно в комплексной и действительной областях).

3.6. Графики рациональных функций. График всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами пересекает ось x в тех точках, абсциссы которых являются его действительными корнями и тем самым не более чем в n точках, так как он имеет не более чем n корней.

Поведение многочлена при неограниченном возрастании или неограниченном убывании его аргумента зависит от четности степени многочлена и знака при старшем члене. Если n — четное число и коэффициент при старшем члене многочлена больше нуля, то как при неограниченном возрастании аргумента, так и при неограниченном его убывании значения многочлена неограниченно возрастают (рис.15). Если n — нечетное число, то при положительном коэффициенте при старшем числе многочлена значения многочлена неограниченно растут при неограниченном возрастании аргумента и

неограниченно убывают при неограниченном его убывании (рис. 16).

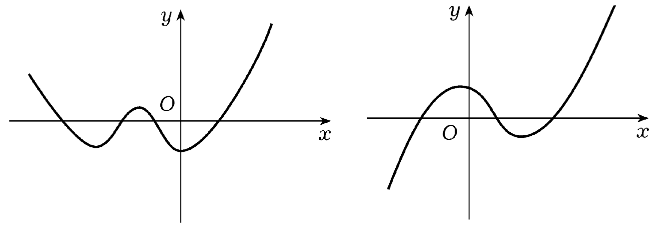


Рис. 15 Рис. 16

Если же коэффициент при старшем члене многочлена отрицателен, то при n четном многочлен неограниченно убывает как при неограниченном возрастании, так и при неограниченном убывании аргумента

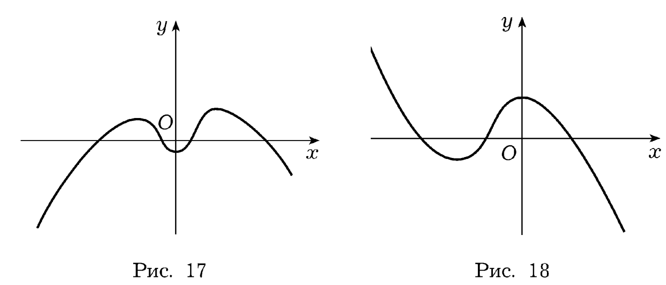


Рис. 17 Рис. 18

(рис. 17), а в случае n четного многочлен неограниченно убывает при неограниченном возрастании аргумента и неограниченно возрастает при неограниченном его убывании (рис. 18).

Если $P(x)$ — многочлен первого порядка:

$$P(x) = ax + b,$$

то его графиком является прямая линия. Коэффициент a равен тангенсу угла (см. п. 3.9), который эта прямая образует с осью x, а b равно ординате точки пересечения прямой с осью y (рис. 19).

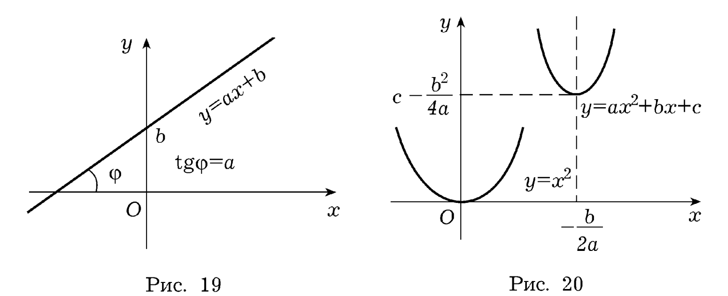


Рис. 19 Рис. 20

В случае когда рассматриваемый многочлен является квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$, его график называется *параболой.*

Поскольку
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \tag{3.40}$$
то график функции $y = ax^2 + bx + c$ получается из параболы $y = x^2$ ее переносом на $-\frac{b}{2a}$ параллельно оси x, растяжением в $|a|$ раз вдоль оси x, симметрией относительно оси x при $a < 0$ и переносом на $c - \frac{b^2}{4a}$ параллельно оси y (рис. 20). Из этого следует, что прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы (3.40), ибо ось y является осью симметрии параболы $y = x^2$. Точка $\left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$ называется ***вершиной параболы*** (3.40).

Рациональная функция
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{3.41}$$
где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих действительных корней (если бы нашелся такой корень x_0, то дробь (3.41) можно было бы сократить на $x - x_0$), обращается в нуль в тех точках, в которых обращается в нуль ее числитель $P(x)$. При этом если кратность нуля числителя четная, то функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не меняет знака в его окрестности, а если нечетная, то меняет. В окрестности нулей знаменателя значения рациональной функции неограниченно возрастают по абсолютной величине при приближении к указанным нулям.

Если степень числителя рациональной функции (3.41) больше степени ее знаменателя, то при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента она также неограниченно возрастает по абсолютной величине; если степень знаменателя больше степени числителя, то она неограниченно убывает по абсолютной величине; если же степень числителя равна степени знаменателя, то она неограниченно приближается к отношению коэффициентов при старших членах многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Изучению поведения рациональных функций помогает определение интервалов, на которых рассматриваемая функция (3.41) сохраняет постоянный знак. Все эти соображения полезно использовать при построении графиков рациональных функций.

В качестве примера построим график функции
$$y = \frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}. \tag{3.42}$$
Эта функция обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 1$, причем в

окрестности нуля она меняет свой знак, а в окрестности единицы не меняет. В окрестности точек $x = -1$ и $x = \pm\sqrt{2}$ она неограниченно возрастает по абсолютной величине, причем в точках $x = \pm\sqrt{2}$ меняет свой знак, а в точке $x = -1$ не меняет.

При неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента функция (3.42) неограниченно приближается к нулю. Интервалы, на которых она положительна или отрицательна, изображены в следующей таблице:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y	-0	$-$	∞	$+$	∞	$+$	0	$-$	0	$-$	∞	$+$	$+0$

Проведенные рассуждения позволяют установить общий вид графика функции (3.42) (рис. 21). С помощью дальнейшего исследования этой функции ее график можно нарисовать более точно.

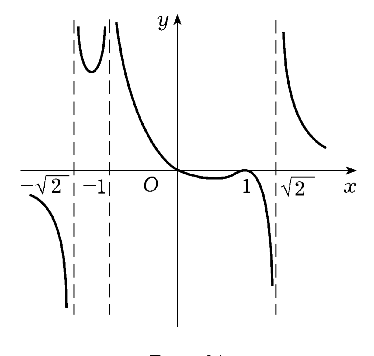


Рис. 21

3.7. Степенная функция. Опишем поведение степенной функции $y = x^\alpha$ в случае, когда α — рациональное число (к более подробному изучению степенной функции мы вернемся в дальнейшем; см. п. 8.3).

Рассмотрим сначала функцию $y = x^n$, где n — натуральное число. Эта функция является частным случаем многочлена степени n с n-кратным корнем $x = 0$. Согласно сказанному в п. 3.6 при четном n ее график имеет вид, изображенный на рис. 22, а при нечетном $n > 1$ — на рис. 23.

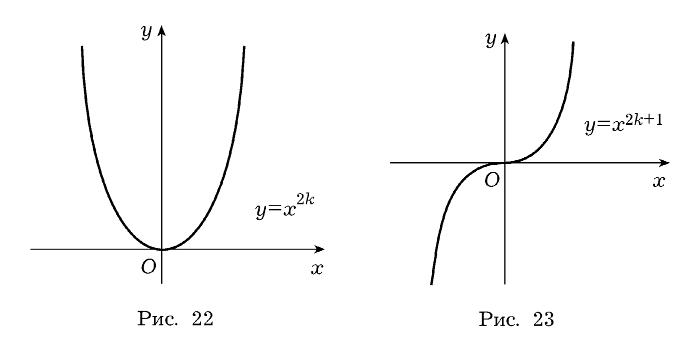


Рис. 22 Рис. 23

Функция $y = \dfrac{1}{x^n}$, где снова n — натуральное число, является рациональной функцией, неограниченно возрастающей при приближении ее аргумента к точке $x = 0$. Если n — четное число, то ее график

имеет вид, изображенный на рис. 24, а если n нечетное, то — на рис. 25.

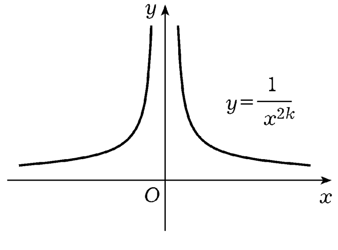


Рис. 24

Функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число, при n нечетном определена на всей действительной оси, а при n четном — только на полуоси $x \geqslant 0$ и принимает при $x > 0$ два значения. Если ограничиться только неотрицательными значениями корня, то и при четном n получится однозначная функция.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной к степенной функции $y = x^n$. Поэтому ее график симметричен относительно биссектрис первого и третьего координатных углов: при нечетном $n > 1$ он имеет вид, изображенный на рис. 26, а при четном, если ограничиться арифметическими значениями корня, — на рис. 27.

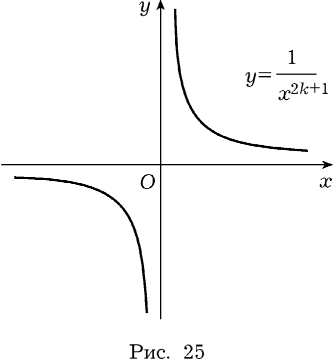


Рис. 25

График функции

$$y = x^{p/q}, \quad x > 0, \tag{3.43}$$

где p и q — целые числа, $p/q > 1$, касается оси x (это естественнее всего доказывается с помощью производной; см. п. 10.3). Если $0 < p/q < 1$, то $q/p > 1$ и, следователь-

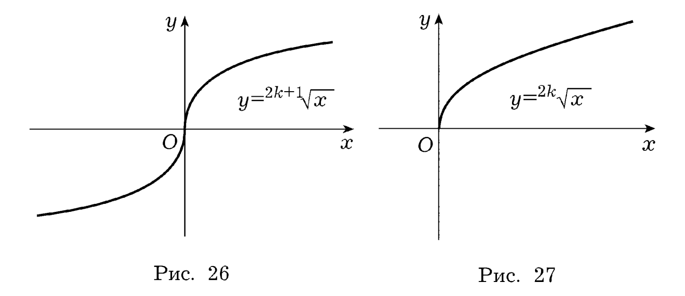


Рис. 26 Рис. 27

но, в силу сказанного график функции (3.43), или, что то же самое, график функции $y = x^{q/p}$, касается оси y.

Если $p/q > 0$, то при неограниченном возрастании x значение y также неограниченно возрастает. Если $p/q < 0$, то при неограниченном возрастании x значение y неограниченно убывает, а при неограниченном приближении x к нулю y неограниченно возрастает.

При $x < 0$ функция $y = x^{p/q}$ определена не для всех p и q. Если она определена при $x < 0$, то является четной или нечетной функцией, и

потому ее график при $x < 0$ получается из ее графика при $x > 0$ с помощью той или иной симметрии.

В качестве примера рассмотрим функцию $y = x^{2/3}$. Здесь $p = 2$, $q = 3$, следовательно, $0 < p/q < 1$, и функция определена при всех x.

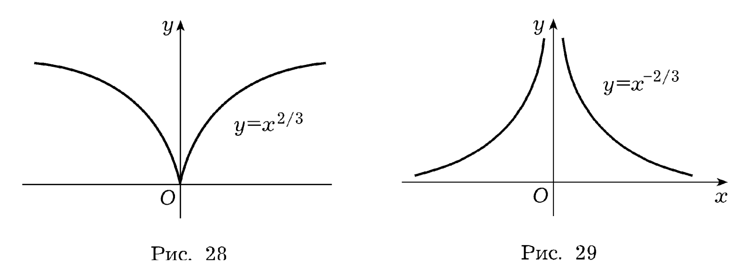


Рис. 28 Рис. 29

В силу сказанного выше ее график (он называется *полукубической параболой*) имеет вид, изображенный на рис. 28.

В качестве второго примера рассмотрим функцию $y = x^{-2/3}$. Ее график изображен на рис. 29.

3.8. Показательная и логарифмическая функции. У степенной функции $y = x^\alpha$ показатель степени постоянен, а основание степени меняется. Функция, у которой постоянно основание степени, а меняется ее показатель, называется *показательной.*

Если $a < 0$, то степень a^x имеет смысл не для всех x. В случае $a = 0$ при $x > 0$ имеет место равенство $0^x \equiv 0$. Поэтому под показательной функцией понимается функция $y = a^x$, где $a > 0$. Она принимает положительные значения при всех значениях x. Если $a = 1$, то $y \equiv 1$. При $x = 0$ показательная функция a^x обращается в 1, так как $a^0 = 1$. Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает при возрастании аргумента, и, следовательно, при $x > 0$ выполняется неравенство $a^x > a^0 = 1$, а при $x < 0$ — неравенство $a^x < a^0 = 1$. При неограниченном убывании аргумента показательная функция в этом случае неограниченно приближается к нулю, а при его неограниченном возрастании также неограниченно возрастает. Если же $a < 1$, то показательная функция убывает при возрастании ее аргумента; она больше единицы при $x < 0$, меньше единицы при $x > 0$ и при неограниченном возрастании аргумента неограниченно приближается к нулю, а при его неограниченном убывании неограниченно возрастает (рис. 30).

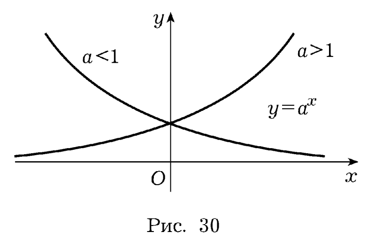


Рис. 30

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то показатель степени α, в который надо возвести число a, чтобы получить число b, называется *логарифмом*

числа b по *основанию* a и обозначается $\log_a b$. Таким образом,

$$a^{\log_a b} \overset{\text{def}}{=} b.$$

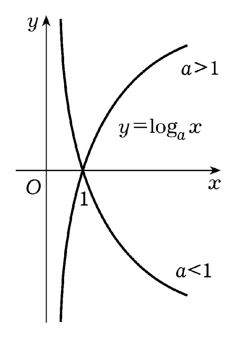


Рис. 31

Функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической функцией*. Она определена при $x > 0$. Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ взаимно обратны друг другу, ибо $y \equiv a^{\log_a y}$ и $\log_a a^x \equiv x$. Поэтому график функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно биссектрис первого и третьего координатных углов (рис. 31).

Если $a > 1$, то логарифм $\log_a x$ положителен при $x > 1$ и отрицателен при $0 < x < 1$, а если $0 < a < 1$, то, наоборот, положителен при $0 < x < 1$ и отрицателен при $x > 1$. Если $a > 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает, причем при неограниченном возрастании аргумента она неограниченно возрастает, а при неограниченном его приближении к нулю она неограниченно убывает. Если же $0 < a < 1$, то логарифмическая функция при возрастании аргумента убывает, причем при его неограниченном возрастании неограниченно убывает, а при его неограниченном приближении к нулю неограниченно возрастает, при любом $a > 0$, $a \neq 1$, имеет место равенство $\log_a 1 = 0$.

Логарифмическая функция по основанию 10 обозначается символом lg.

3.9. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. В прямоугольном треугольнике отношение катета, противолежащего данному углу α треугольника, к гипотенузе называется *синусом* ($\sin\alpha$) этого угла, а отношение прилежащего катета к гипотенузе — *косинусом* ($\cos\alpha$) угла α; отношение противолежащего катета к прилежащему — *тангенсом* ($\operatorname{tg}\alpha$), а прилежащего к противолежащему — *котангенсом* ($\operatorname{ctg}\alpha$) угла α (рис. 32). Из свойств подобных треугольников следует, что синус, косинус, тангенс и котангенс не зависят от размеров треугольника, а однозначно определяются углом α,

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

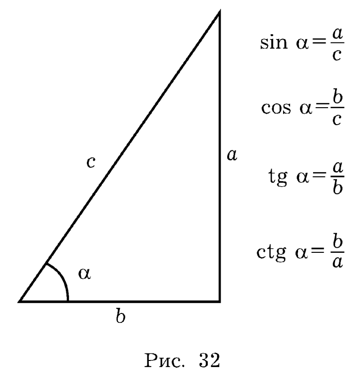


Рис. 32

Легко видеть, что они связаны соотношениями

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3.44)$$

Для определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса в случае

произвольного угла α, $-\infty < \alpha < +\infty$, рассмотрим на координатной плоскости переменных x, y окружность радиуса 1 с центром O в начале координат (рис. 33). Обозначим α угол, который образует вектор $\overline{OA}$, идущий из начала координат в точку $A = (x, y)$, с положительным направлением оси x, иначе говоря, угол, на который надо повернуть единичный вектор оси x, чтобы он совпал с вектором $\overline{OA}$. При этом угол, который получается указанным вращением, считается положительным, если вращение производится против часовой стрелки, и отрицательным, если по часовой стрелке. Таким образом, угол α, который образует вектор $\overline{OA}$ с осью x, определен с точностью до целого, кратного полному обороту в ту или другую сторону. Следовательно, если α — величина угла в радианной мере, образованного вектором $\overline{OA}$ с осью x, то при любом целом n угол $\alpha + 2\pi n$ также будет углом, образованным этим вектором с осью x.

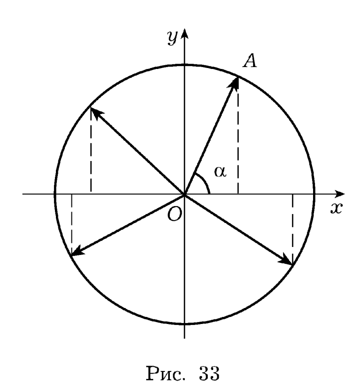


Рис. 33

Если $0 < \alpha < \pi/2$, то согласно данному выше определению

$$\sin\alpha = x, \quad \cos\alpha = y. \tag{3.45}$$

Если α — произвольный угол, $-\infty < \alpha < +\infty$, и $\overline{OA}$ — единичный вектор с координатами x, y, образующий угол α с осью x, то формулы (3.45) принимаются за определение значений синуса и косинуса этого угла. Из них следует, что

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha, \quad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha. \tag{3.46}$$

Тангенс и котангенс произвольного угла α определяются по формулам

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.47}$$

Таким образом, они определены для всех тех α, для которых знаменатели в правых частях равенств (3.47) не обращаются в нуль.

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются *основными тригонометрическими функциями.* Из их определения следует, что они являются периодическими функциями: при полном обороте (на 360° в градусной мере или на 2π в радианной) в том или ином направлении радиус $\overline{OA}$ займет прежнее положение, т. е. будет иметь те же самые координаты, а следовательно, синус, косинус, тангенс и котангенс примут прежние значения.

Из формул (3.46) и (3.47) следует, что значения тангенса и котан-

генса будут повторяться и через пол-оборота. Таким образом, синус и косинус являются периодическими функциями с периодом 2π (мы будем пользоваться для измерения углов безразмерной радианной мерой, в которой угол задается действительным числом), а тангенс и

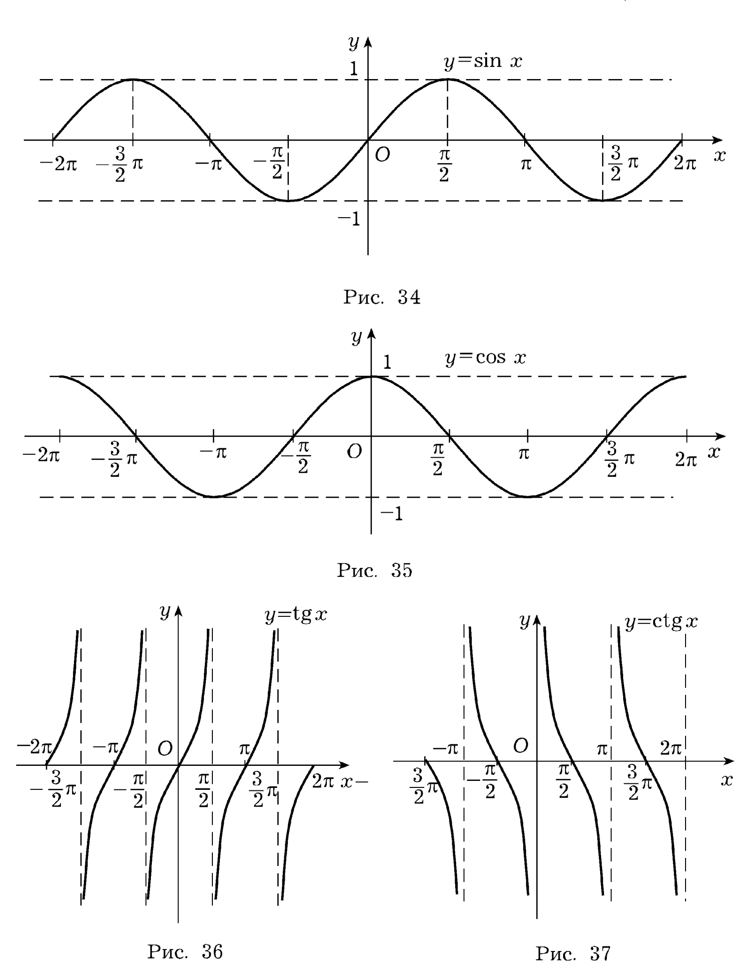


Рис. 34

Рис. 35

Рис. 36

Рис. 37

котангенс — с периодом π. Их графики изображены на рис. 34–37.

Обратные функции для основных тригонометрических функций являются многозначными. Однако если функцию синус рассмотреть на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, косинус — на отрезке $[0, \pi]$, тангенс — на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, а котангенс — на интервале $(0, \pi)$, то обратные к ним функции будут уже однозначными и они обозначаются соответственно $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$. Функции $\arcsin x$ и

$\arccos x$ определены на отрезке $[-1, 1]$, а $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ — на всей

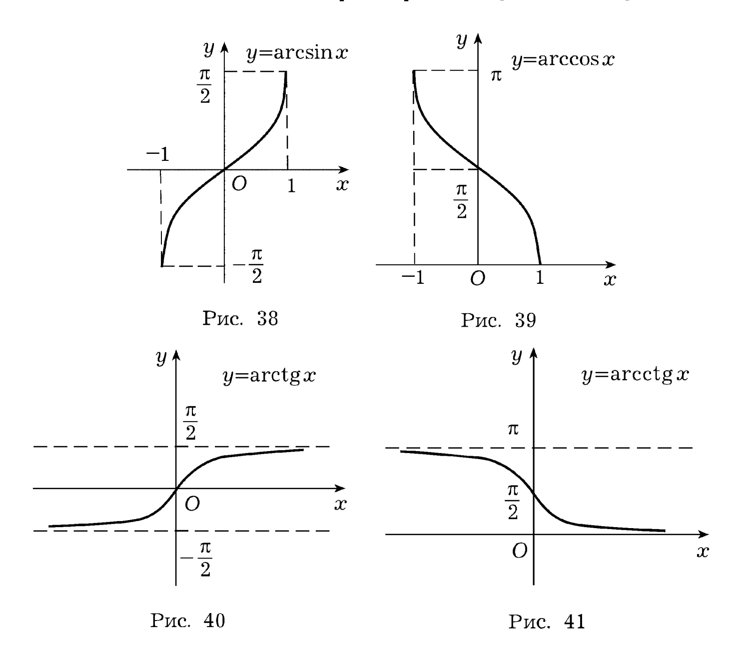


Рис. 38 Рис. 39

Рис. 40 Рис. 41

числовой прямой. Их графики изображены на рис. 38–41.

3.10. Параллельный перенос и растяжение графиков. Если известен график функции $y = f(x)$, то с его помощью легко получить график функции вида $y = kf(ax + b) + l$. Опишем это построение по этапам. Из графика функции $f(x)$:

1) график функции $f(ax)$, $a > 0$, получается сжатием графика $f(x)$ вдоль оси x в a раз ("сжатие" с коэффициентом a, $0 < a < 1$, является растяжением в $1/a$ раз);

2) график функции $f(-x)$ — преобразованием симметрии относительно оси y;

3) график функции $f(x + b)$ — переносом параллельно оси x на отрезок длины $|b|$ влево, если $b > 0$, и вправо, если $b < 0$;

4) график функции $kf(x)$, $k > 0$, — растяжением вдоль оси y в k раз ("растяжение" с коэффициентом k, $0 < k < 1$, является сжатием в $1/k$ раз);

5) график функции $-f(x)$ — преобразованием симметрии относительно оси x;

6) график функции $f(x) + l$ — переносом параллельно оси y на отрезок длины $|l|$ вверх, если $l > 0$, и вниз, если $l < 0$.

Применив эти операции, из графика функции $f(x)$ можно полу-

чить график функции

$$kf(ax+b)+l \equiv kf\Big(a\Big(x+\frac{b}{a}\Big)\Big)+l, \quad a \neq 0.$$

Для этого согласно указанному выше надо последовательно построить графики функций

$$f(ax), \quad f\Big(a\Big(x+\frac{b}{a}\Big)\Big)=f(ax+b), \quad kf(ax+b) \quad kf(ax+b)+l$$

(на рис. 42 схематически изображено построение графика функ-

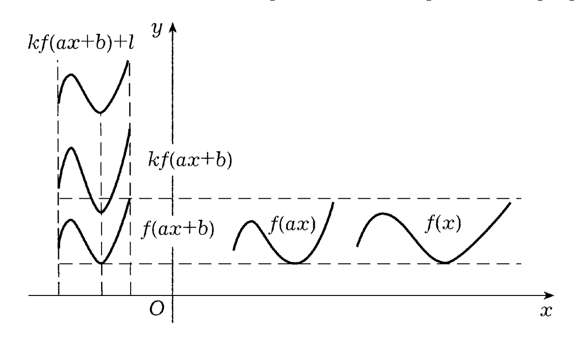


Рис. 42

ции $kf(ax+b)+l$ в случае, когда $a>0$, $b>0$, $k>0$, $l>0$).

Вместо последовательного построения этих графиков можно сделать преобразование координат: соответствующий параллельный перенос, изменение масштабов, а если надо, и ориентации координатных осей. Именно, график самой функции $f(x)$ станет графиком функции $kf(ax+b)+l$, $a \neq 0$, $k \neq 0$, если перенести начало координат в точку $\left(b, -\frac{l}{k}\right)$, увеличить масштаб по оси x в $|a|$ раз, уменьшить его по оси y в $|k|$ раз и при $a<0$, соответственно при $k<0$, изменить ориентацию оси x соответственно оси y (рис. 43).

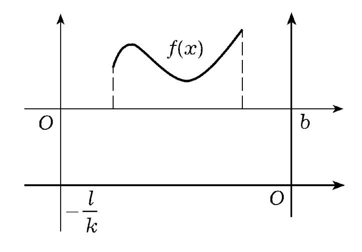


Рис. 43

§ 4. Числовые множества

4.1. Ограниченные и неограниченные множества.

Определение 1. Множество $X \subset R$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $b \in R$, что для всех $x \in X$ имеет место неравенство $x \leqslant b$. Число b называется в этом случае числом, *ограничивающим сверху* множество X.

Множество X называется *ограниченным снизу*, если существует такое число $a \in R$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant a$. Число a называется в этом случае числом, *ограничивающим снизу* множество X.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным.*

С помощью логических символов существования и всеобщности определение, например, ограниченного сверху множества можно записать следующим образом:

$$\exists\, b \in R \quad \forall x \in X\colon\; x \leqslant b \tag{4.1}$$

(здесь двоеточие означает “имеет место” или “выполняется условие”).

Множество, не являющееся ограниченным сверху, называется *неограниченным сверху.*

Определение неограниченного сверху множества можно сформулировать и в позитивной форме, т. е. без отрицаний (без частицы “не”), следующим образом; множество X называется неограниченным сверху, если для любого числа $b \in R$ найдется такой $x \in X$, что $x > b$.

Запишем это определение с помощью логических символов:

$$\forall b \in R \quad \exists x \in X\colon\; x > b. \tag{4.2}$$

Сравнивая определения (4.1) и (4.2), видим, что при построении отрицания символ существования заменился на символ всеобщности, а символ всеобщности — на символ существования. Этим формальным правилом можно пользоваться при построении отрицаний в позитивной форме.

Аналогично, множество, не являющееся ограниченным снизу, называется *неограниченным снизу.*

Множество, не являющееся ограниченным, называется *неограниченным.*

Множество натуральных чисел N является примером ограниченного снизу множества. Если $a \in R$ и $b \in R$, то отрезок $[a, b]$ представляет собой ограниченное множество. Множества рациональных чисел Q, иррациональных чисел I, вообще всех чисел R дают примеры неограниченных множеств.

4.2. Верхняя и нижняя грани.

Определение 2. Пусть числовое множество X ограничено сверху. Наименьшее среди всех чисел, ограничивающих сверху множество $X \subset R$, называется его *верхней гранью* и обозначается $\sup X$ или $\sup\limits_{x \in X} x$ (от латинского слова supremum — наибольший).

Если числовое множество X ограничено снизу, то наибольшее среди всех чисел, ограничивающих снизу множество X, называется его

нижней гранью и обозначается $\inf X$ или $\inf\limits_{x\in X} x$ (от латинского слова infinum — наименьший).

Итак, $\beta = \sup X$, если, во-первых, число β ограничивает сверху множество X, т. е. для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant \beta$, а во-вторых, число β является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих сверху множество X (т. е. если $\beta' < \beta$, то число β' уже не ограничивает сверху множество X, а это означает, что существует такое $x \in X$, что $x > \beta'$).

Таким образом, определение верхней грани можно перефразировать в следующем виде.

Определение 2′. Число β называется *верхней гранью числового множества* X, если:

1) для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant \beta$;

2) для любого $\beta' < \beta$ существует такой $x \in X$, что $x > \beta'$ (рис. 44).

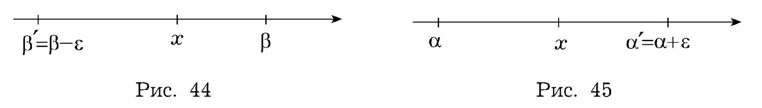


Рис. 44 Рис. 45

Аналогично, число α называется *нижней гранью числового множества* X, если:

1) для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant \alpha$;

2) для любого $\alpha' > \alpha$ существует такой $x \in X$, что $x < \alpha'$ (рис. 45).

Если во втором условии положить $\varepsilon = \beta - \beta'$ (соответственно $\varepsilon = \alpha' - \alpha$), то это условие можно перефразировать следующим образом:

2′) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $x \in X$, что $x > \beta - \varepsilon$ (соответственно $x < \alpha + \varepsilon$).

Пример. Пусть $a \in R$ и $b \in R$, $a \leqslant b$; тогда

$$\sup\,[a,b] = \sup\,(a,b) = b, \quad \inf\,[a,b] = \inf\,(a,b) = a.$$

Эти примеры показывают, в частности, что нижняя и верхняя грани могут как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству.

В силу самого своего определения верхняя и нижняя грани множества единственны. В самом деле, если в некотором множестве, принадлежащем даже расширенной числовой прямой $\overline{R}$, существует наименьший (наибольший) элемент, то он единственен, так как из двух разных элементов множества больший из них не может быть наименьшим элементом, а меньший — наибольшим.

Теорема 1. *Всякое ограниченное сверху непустое числовое множество имеет верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу непустое числовое множество имеет нижнюю грань.*

▷ Пусть числовое множество A ограничено сверху, $A \neq \varnothing$, а B —

множество всех чисел, ограничивающих сверху множество A. Если $a \in A$ и $b \in B$, то из определения числа, ограничивающего сверху множество, следует, что $a \leqslant b$. Следовательно, по свойству непрерывности действительных чисел (п. 2.1, свойство V) существует такое число β, что для всех $a \in A$ и всех $b \in B$ будет выполняться неравенство $a \leqslant \beta \leqslant b$. Неравенство

$$a \leqslant \beta, \quad a \in A,$$

означает, что число β ограничивает сверху множество A, а неравенство

$$\beta \leqslant b, \quad b \in B,$$

— что число β является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих сверху множество A. Следовательно, $\beta = \sup A$.

Аналогично доказывается, что ограниченное снизу числовое множество имеет нижнюю грань. $\triangleleft$

Замечание 1. Если числовое множество X неограничено сверху, то у него не существует верхней грани в смысле определения 2. В этом случае по определению полагаем, что верхней гранью множества X является $+\infty$:

$$\sup X \stackrel{\text{def}}{=} +\infty.$$

Отметим, что при таком определении условия 1) и 2) определения $2'$ оказываются выполненными, если использовать соглашение (2.2) (п. 2.2).

Если числовое множество X неограничено снизу, то его нижней гранью является $-\infty$:

$$\inf X \stackrel{\text{def}}{=} -\infty.$$

Благодаря этому соглашению и теореме 1 всякое непустое числовое множество имеет единственную верхнюю (нижнюю) грань, конечную, если оно ограничено сверху (снизу), и бесконечную, если оно не ограничено сверху (снизу).

Замечание 2. Если X — числовое множество и для некоторого числа a и всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant a$ (соответственно $x \geqslant a$), то $\sup\limits_{x \in X} \leqslant a$ $\left(\inf\limits_{x \in X} x \geqslant a\right)$, так как $\sup X$ (соответственно $\inf X$) является наименьшим (наибольшим) среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество X. Иначе говоря, в неравенствах можно переходить к верхним и нижним граням.

4.3*. Арифметические свойства верхних и нижних граней. Отметим три свойства верхних и нижних граней, связанные с арифметическими операциями над числовыми множествами. Прежде всего определим такие операции.

Арифметической суммой $X_1 + ... + X_n$ числовых множеств $X_1, ...$ $..., X_n$ называется множество всех чисел x, представимых в виде

$$x = x_1 + ... + x_n, \quad x_1 \in X_1, \quad ..., \quad x_n \in X_n.$$

Арифметической разностью $X - Y$ числовых множеств X и Y называется множество всех чисел z, представимых в виде

$$z = x - y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Следует, конечно, отличать понятие арифметической суммы $X_1 + ... + X_n$ и разности $X - Y$ от понятия теоретико-множественной суммы $X_1 \cup ... \cup X_n$ и разности $X \setminus Y$ тех же множеств.

Произведением λX числа λ на числовое множество X называется множество всех чисел вида λx, $x \in X$.

1°.
$$\sup(X_1 + ... + X_n) = \sup X_1 + ... + \sup X_n, \tag{4.3}$$
$$\inf(X_1 + ... + X_n) = \inf X_1 + ... + \inf X_n. \tag{4.4}$$

▷ Если $x \in X_1 + ... + X_n$, т. е. $x = x_1 + ... + x_n$, $x_1 \in X_1$, ..., $x_n \in X_n$, то $x_k \leqslant \sup X_k$, $k = 1, 2, ..., n$, и, следовательно,

$$x = x_1 + ... + x_n \leqslant \sup X_1 + ... + \sup X_n. \tag{4.5}$$

Пусть теперь

$$y < \sup X_1 + ... + \sup X_n. \tag{4.6}$$

Рассмотрим сначала случай, когда все верхние грани $\sup X_k$, $k = 1, 2, ..., n$, конечные. В этом случае представим число y в виде $y = y_1 + ... + y_n$, где

$$y_k < \sup X_k, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{4.7}$$

В качестве y_k можно взять

$$y_k \overset{\text{def}}{=} \sup X_k - \frac{\varepsilon}{n}, \tag{4.8}$$

где

$$\varepsilon = \sup X_1 + ... + \sup X_n - y > 0. \tag{4.9}$$

Действительно, в этом случае $y_k < \sup X_k$ и

$$y_1 + ... + y_n \underset{(4.8)}{=} \left(\sup X_1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) + ... + \left(\sup X_n - \frac{\varepsilon}{n}\right) =$$
$$= (\sup X_1 + ... + \sup X_n) - \varepsilon \underset{(4.9)}{=} y.$$

Из неравенств (4.7) следует, что существуют такие $x_k \in X_k$, что

$$y_k < x_k \leqslant \sup X_k, \quad k = 1, 2, ...$$

Полагая $x = x_1 + ... + x_n$, получим

$$x \in X_1 + ... + X_n, \quad x = x_1 + ... + x_n > y_1 + ... + y_n = y. \tag{4.10}$$

Таким образом, выполняются оба условия определения верхней грани (см. (4.5) и (4.10)), т. е. $\sup X_1 + ... + \sup X_n$ действительно является верхней гранью множества $X_1 + ... + X_n$.

Пусть теперь хотя бы одна из верхних граней $\sup X_k$, $k = 1, 2, ...$ $..., n$, бесконечная, т. е. равна $+\infty$, например $\sup X_1 = +\infty$. Докажем, что тогда

$$\sup (X_1 + ... + X_n) = +\infty = \sup X_1 + ... + \sup X_n\,^*).$$

Пусть задано какое-либо $y \in R$. Зафиксируем произвольно $x_k \in X_k$, $k = 2, ..., n$. Тогда из условия $\sup X_1 = +\infty$ следует, что существует такое $x_1 \in X_1$, что $x_1 > y - x_2 - ... - x_n$, т. е.

$$x \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2 + ... + x_n > y.$$

Так как y — произвольное число, а $x \in X_1 + ... + X_n$, то это и означает, что $\sup (X_1 + ... + X_n) = +\infty$.

Аналогично доказывается формула (4.4). $\triangleleft$

2°. *Если* $\lambda > 0$, *то*

$$\sup \lambda X = \lambda \sup X, \tag{4.11}$$

$$\inf \lambda X = \lambda \inf X, \tag{4.12}$$

а если $\lambda < 0$, *то*

$$\sup \lambda X = \lambda \inf X, \tag{4.13}$$

$$\inf \lambda X = \lambda \sup X. \tag{4.14}$$

$\triangleright$ Пусть $\lambda > 0$. Если $y \in \lambda X$, т. е. $y = \lambda x$, где $x \in X$ и, следовательно, $x \leqslant \sup X$, то $y = \lambda x \leqslant \lambda \sup X$. Если $y < \lambda \sup X$, т. е. $y/\lambda < \sup X$, то найдется такое $x \in X$, что $x > y/\lambda$ и, следовательно, $\lambda x > y$, где $\lambda x \in \lambda X$. Таким образом, $\lambda \sup X$ является верхней гранью множества λX, т. е. формула (4.11) доказана. Аналогично доказывается и формула (4.12).

Пусть теперь $\lambda < 0$. Если $y \in \lambda X$, т. е. $y = \lambda x$, где $x \in X$ и, следовательно, $x \geqslant \inf X$, то $\lambda x \leqslant \lambda \inf X$. Если $y < \lambda \inf X$, т. е. $y/\lambda > \inf X$, то найдется такое $x \in X$, что $x < y/\lambda$, а потому $\lambda x > y$, где $\lambda x \in \lambda X$. Это и означает, что $\lambda \inf X$ является верхней гранью множества λX. Равенство (4.13) доказано. Аналогично доказывается равенство (4.14). $\triangleleft$

Положим теперь для каждого множества X

$$-X \stackrel{\text{def}}{=} (-1)X. \tag{4.15}$$

Очевидно, что из определения суммы $X + Y$ и разности $X - Y$ множеств следует

$$X - Y = X + (-Y). \tag{4.16}$$

В силу определения (4.15) из второго свойства при $\lambda = -1$ получаем

$$\sup (-X) = -\inf X, \quad \inf (-X) = -\sup X. \tag{4.17}$$

*) Мы полагаем, что $a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty$ для любого числа a.

3°.
$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y. \qquad (4.18)$$

Следует сразу из первого свойства и формул (4.16) и (4.17).

4.4. Принцип Архимеда.

Т е о р е м а 2. *Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n > a$.*

▷ Если бы утверждение теоремы не имело места, то нашлось бы такое число a, что для всех натуральных чисел n выполнялось бы неравенство $n \leqslant a$, т. е. множество натуральных чисел N было бы ограничено сверху. Тогда, согласно теореме 1, у множества N существовала бы конечная верхняя грань:
$$\beta = \sup N < +\infty. \qquad (4.19)$$

Поскольку $\beta - 1 < \beta$, то в силу определения верхней грани (см. свойство 2 в определении 2′ в п. 4.2) найдется такое натуральное число n, что $n > \beta - 1$, т. е.
$$n + 1 > \beta, \qquad (4.20)$$
но $n + 1$ — также натуральное число: $n + 1 \in N$, поэтому неравенство (4.20) противоречит условию (4.19). ◁

С л е д с т в и е (принцип Архимеда*)). *Для любых чисел a и b таких, что $0 < a < b$, существует натуральное число n, для которого выполняется неравенство* (рис. 46)
$$na > b. \qquad (4.21)$$

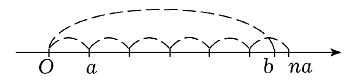


Рис. 46

▷ Действительно, согласно теореме 2 для числа b/a существует такое натуральное число n, что $n > b/a$, откуда сразу и следует (4.21). ◁

4.5. Принцип вложенных отрезков.

О п р е д е л е н и е 3. Система числовых отрезков
$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots, \quad a_n \in R, \quad b_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (4.22)$$
называется *системой вложенных отрезков*, если
$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \qquad (4.23)$$
т. е. если (рис. 47)
$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Рис. 47

Т е о р е м а 3. *Всякая система вложенных числовых отрезков имеет непустое пересечение.*

---

*) Архимед (287–212 до н.э.) — древнегреческий математик и механик.

▷ Пусть задана система вложенных отрезков (4.22). Обозначим через A множество всех левых концов a_n от- резков этой системы, а через B — множество их правых концов b_n. Из неравенств (4.23) следует, что для любых номеров m и n выполняется неравенство $a_m \leqslant b_n$. Поэтому по свойству непрерывности действительных чисел (п. 2.1, свойство V) существует такое число ξ, что для всех номеров m и n выполняется неравенство

$$a_m \leqslant \xi \leqslant b_n,$$

в частности, неравенство $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, $n = 1, 2, ...$ Это и означает, что точка ξ принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$. ◁

Укажем условие, при котором пересечение системы вложенных отрезков состоит из единственной точки.

Определение 4. Длины $b_n - a_n$ отрезков $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in \in R$, $a_n \leqslant b_n$, $n = 1, 2, ...$, называются *стремящимися к нулю*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$b_n - a_n < \varepsilon. \tag{4.24}$$

Теорема 4. *Для всякой системы вложенных отрезков* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$, *длины которых стремятся к нулю, существует единственная точка* ξ, *принадлежащая всем отрезкам данной системы*; *при этом*

$$\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}. \tag{4.25}$$

▷ Если точки ξ и η принадлежат всем отрезкам рассматриваемой системы, т. е.

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad \eta \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, ...,$$

то ясно, что для всех номеров n выполняются неравенства

$$|\eta - \xi| \leqslant b_n - a_n,$$

а следовательно, в силу условия (4.24) для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|\eta - \xi| < \varepsilon. \tag{4.26}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то это возможно только тогда, когда $\xi = \eta$ (если бы $\xi \neq \eta$, то, например, при $\varepsilon = |\eta - \xi|$ неравенство (4.26) было бы противоречиво). Это означает, что существует единственное число ξ, принадлежащее всем отрезкам $[a_n, b_n]$:

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, ...$$

Из этих неравенств видно, что число ξ ограничивает сверху числа a_n и снизу числа b_n, поэтому если $\alpha = \sup\{a_n\}$, $\beta = \inf\{b_n\}$, то в силу определения верхней и нижней граней будут выполняться неравенства

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant \xi \leqslant \beta \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, ... \tag{4.27}$$

Таким образом, числа α, β и ξ принадлежат всем отрезкам $[a_n, b_n]$, а следовательно, по доказанному выше они равны, т. е. выполняется условие (4.25). $\triangleleft$

Замечание 1. Для интервалов и полуинтервалов множества действительных чисел аналог принципа вложенных отрезков не имеет места. Например,

$$\bigcap_{n\in N}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n\in N}\left(0, \frac{1}{n}\right] = \varnothing.$$

Замечание 2. Для множества одних только рациональных чисел принцип вложенных отрезков несправедлив. При этом под отрезком в множестве рациональных чисел понимается пересечение обычного отрезка, концы которого являются рациональными числами, с множеством рациональных чисел:

$$[a, b] \cap Q = \{x \in Q\colon\ a \leqslant x \leqslant b\}, \quad a \in Q, \quad b \in Q.$$

Например, пусть числа a_n и b_n представляют собой десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ с недостатком и с избытком и имеют по n десятичных знаков после запятой, $n = 1, 2, \ldots$, тогда

$$\bigcap_{n\in N}[a_n, b_n] \cap Q = \varnothing,$$

так как $\bigcap\limits_{n\in N}[a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$ и $\sqrt{2}$ — иррациональное число: $\sqrt{2} \notin Q$.

4.6*. Счетность рациональных чисел. Несчетность действительных чисел. Сравнение множеств осуществляется с помощью понятия взаимно однозначного соответствия.

Определение 5. Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), называются *равномощными*.

Замечание. Нетрудно убедиться, что если множество X равномощно множеству Y, а множество Y равномощно Z, то и множество X равномощно множеству Z.

Множество X называется *конечным*, если существует такое натуральное число n (называемое *числом элементов множества* X), что между элементами множества X и элементами множества $\{1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1, n\}$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, *два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.* Пустое множество по определению считается конечным. Множества, не являющиеся конечными, называются *бесконечными.*

Приведем примеры равномощных бесконечных множеств.

Примеры. 1. Множество четных натуральных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел. Действительно, соответствие

$n \mapsto 2n$, $n = 1, 2, ...$, является биекцией множества натуральных чисел N и множества всех четных натуральных чисел.

2. Множество всех целых чисел равномощно множеству натуральных чисел. В самом деле, соответствие

$$2n \mapsto n, \quad n = 1, 2, ...,$$
$$2n + 1 \mapsto -n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

является биекцией множества натуральных чисел N и множества целых чисел Z.

3. Любые два конечных интервала (соответственно отрезка) числовой прямой равномощны. Если заданы два интервала (a, b) и (c, d), то отображение

$$x = \frac{(d - c)t + bc - ad}{b - a}, \quad a < t < b,$$

является биекцией интервалов (a, b) и (c, d) (соответственно отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$).

4. Множество всех действительных чисел R равномощно любому конечному интервалу числовой оси. В силу замечания после определения 5 и примера 3 достаточно показать, что множество действительных чисел равномощно хотя бы одному интервалу, поэтому достаточно заметить, что функция $y = \frac{t}{1 - t^2}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(-1, 1)$ и точками всей числовой оси.

Примеры 1, 2 и 4 показывают, что в случае бесконечных множеств собственное подмножество бесконечного множества может оказаться равномощным всему множеству.

5. Пусть задано некоторое множество X. Всякое отображение множества натуральных чисел N в множество X, т. е. отображение вида $f\colon\ N \to X$, называется ***последовательностью элементов*** множества X. Элемент $f(n)$, $n \in N$, обозначается через x_n и называется n-м ***членом последовательности*** $f\colon\ N \to X$, число n — его ***номером***, и сам элемент $f(n) \in X$ — ***значением*** этого члена.

Последовательность $f\colon\ N \to X$ обозначается также $\{x_n\}$ или x_n, $n = 1, 2, ...$

Отметим, что член последовательности задается его значением и номером. Если $n > m$, то член последовательности x_n называется членом, следующим за членом x_m.

Множество членов последовательности равномощно с множеством натуральных чисел, так как каждому натуральному числу соответствует член последовательности и разным натуральным числам соответствуют разные члены последовательности, отличающиеся друг от друга по крайней мере номерами. Таким образом, множество членов последовательности всегда бесконечно, в то время как множество значений членов последовательности, т. е. множество значений функции

$f\colon N \to X$ (иначе говоря, подмножество множества X, на которое посредством отображения f отображается множество N натуральных чисел), может оказаться конечным множеством, в частности состоять из одного элемента. В последнем случае, т. е. тогда, когда у последовательности все значения ее элементов совпадают, она называется *стационарной.*

Определение 6. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным.*

Из рассмотренных выше примеров 1, 2 и 5 следует, что множества всех четных чисел, всех целых чисел и всех членов любой последовательности являются счетными.

Пусть X — счетное множество, т. е. существует взаимно однозначное отображение (биекция) множества натуральных чисел N на множество X. Элемент множества X, соответствующий при этом отображении числу n, обозначим, как и в случае последовательности, x_n и будем называть число n его номером. Поэтому можно сказать, что множество является счетным, если его элементы можно перенумеровать натуральными числами. Отличие определения счетного множества от последовательности состоит в том, что в случае последовательности рассматриваемое отображение множества натуральных чисел не обязано быть биекцией: не исключается случай, когда разным натуральным числам окажется поставленным в соответствие один и тот же элемент. Отсюда следует, что множество значений членов последовательности либо конечно, либо счетно, т. е., как говорят, не более чем счетно.

Лемма 1. *Любое бесконечное множество содержит бесконечное счетное подмножество.*

$\triangleright$ Пусть X — бесконечное множество; тогда оно во всяком случае непусто, т. е. в нем существует по крайней мере один элемент, обозначим его через x_1. Поскольку множество X бесконечно, то множество $X \setminus \{x_1\}$ также непусто, т. е. содержит по крайней мере один элемент, обозначим его x_2. Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим элемент x_n. Поскольку X — бесконечное множество, то множество $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ непусто, т. е. содержит по крайней мере один элемент, обозначим его x_{n+1} и т. д. Множество $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ — искомое счетное подмножество множества X. $\triangleleft$

Лемма 2. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

$\triangleright$ Пусть X — счетное множество: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ и $Y \subset X$. Обозначим через y_1 элемент из Y, имеющий наименьший номер в X, через y_2 — элемент множества Y, имеющий следующий ближайший номер, и т. д. Поскольку каждый элемент множества Y является некоторым элементом x_n множества X и, следовательно, имеет номер n,

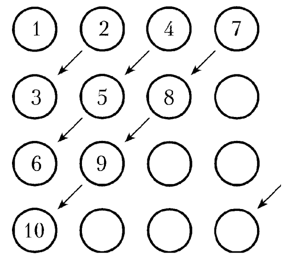
то через конечное число шагов (не больше, чем n) он получает некоторый номер m и в множестве Y, т. е. будет обозначен y_m, причем, поскольку множество Y бесконечно, этот процесс может быть продолжен неограниченно. Таким образом, все элементы множества Y окажутся перенумерованными, что и означает счетность этого множества. ◁

Т е о р е м а 5. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

▷ Расположим все рациональные числа в таблицу, содержащую бесконечное число строк и столбцов, следующим образом (см. таблицу):

0	1	-1	2	-2	...
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
....					....
$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$	...	...	...	...
....					....

Здесь в n-ю строчку помещены рациональные числа, записываемые несократимыми рациональными дробями со знаменателем n и упорядоченные по возрастанию их абсолютных величин, причем непосредственно за каждым положительным числом следует ему противоположное. Очевидно, что каждое рациональное число находится на каком-то месте в этой таблице.



Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме, в которой в кружочках стоят номера соответствующих элементов, а стрелки указывают направление нумерации.

В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т. е. множество Q рациональных чисел счетно. ◁

Возникает естественный вопрос, существуют ли н е с ч е т н ы е множества, т. е. бесконечные множества, не являющиеся счетными, а если существуют, то интересно построить пример несчетного множества.

Л е м м а 3. *Любой отрезок множества действительных чисел состоит из несчетного множества точек.*

▷ Допустим противное: пусть точки некоторого отрезка $[a, b]$, $a \in R$, $b \in R$, $a < b$, можно занумеровать: $[a, b] = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Выберем какой-либо отрезок $[a_1, b_1]$, лежащий на $[a, b]$ и не содержащий точки x_1 (рис. 48):

$$x_1 \notin [a_1, b_1] \subset [a, b].$$

a x_1 a_1 x_2 a_2 b_2 b_1 b

Рис. 48

Далее выберем отрезок $[a_2, b_2]$, лежащий

на $[a_1, b_1]$ и не содержащий точки x_2, и т. д. Таким образом, если выбран отрезок $[a_n, b_n]$, то выберем отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, лежащий на $[a_n, b_n]$ и не содержащий точки x_{n+1}. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$, такую, что

$$x_n \notin [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, ... \tag{4.28}$$

Следовательно, ни одна точка x_n не принадлежит пересечению $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, но согласно принципу вложенных отрезков (см. п. 4.5, теорема 3) существует точка, обозначим ее ξ, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$:

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, ..., \tag{4.29}$$

а поэтому и отрезку $[a, b]$, ибо $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ при всех $n = 1, 2, ...$ А так как все точки отрезка $[a, b]$ по предположению перенумерованы, то точка ξ также должна иметь какой-то номер, т. е. существует такое натуральное число n_0, что $\xi = x_{n_0}$, и тогда согласно (4.29) получим

$$x_{n_0} \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, ... \tag{4.30}$$

В частности, $x_{n_0} \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, а это противоречит условию (4.28). $\lhd$

Теорема 6 (Кантор*)). *Множество всех действительных чисел несчетно.*

$\rhd$ Если бы множество всех действительных чисел было счетным, то было бы счетным, согласно лемме 2, и любое его подмножество, в частности, любой отрезок, что противоречит лемме 3. $\lhd$

§ 5. Предел числовой последовательности

5.1. Определение предела числовой последовательности. Одним из важнейших понятий математического анализа является понятие предела. Начнем его изучение с предела последовательности действительных чисел. Напомним (см. п. 4.6*, пример 5), что последовательностью $\{x_n\}$ элементов некоторого множества X называется отображение множества натуральных чисел в это множество X. Образ при этом отображении натурального числа n (член последовательности с номером n) в множестве X обозначается через x_n. В частности, последовательностью действительных чисел является "занумерованное" натуральными числами некоторое множество $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ действительных чисел, причем члены последовательности с разными номерами могут иметь одно и то же значение. Примерами последовательностей являются $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ и $1, 1, 1, ..., 1, ...$ В дальнейшем в этом параграфе буквой n всегда обозначаются натуральные числа.

*) Г. Кантор (1845–1918) — немецкий математик.

Под бесконечно удаленной точкой числовой прямой будем понимать одну из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$ или ∞ (см. п. 2.2).

Определение 1. Конечная или бесконечно удаленная точка числовой прямой называется *пределом* некоторой числовой последовательности действительных чисел, если какова бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены рассматриваемой последовательности, начиная с некоторого номера.

Этот номер зависит, вообще говоря, от выбора окрестности точки a. Сформулированное условие равносильно тому, что вне любой окрестности точки a находится лишь конечное число членов рассматриваемой последовательности. Вспомнив, что окрестности конечных и бесконечно удаленных точек числовой прямой определяются заданием некоторого числа $\varepsilon > 0$ (п. 2.2), определение предела последовательности действительных чисел можно перефразировать следующим образом.

Точка a (конечная или бесконечно удаленнная) числовой прямой называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ члены x_n содержатся в окрестности $U(a;\varepsilon)$:

$$x_n \in U(a;\varepsilon), \quad n > n_\varepsilon. \tag{5.1}$$

Если выполняется это условие, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (а иногда пишут $x_n \to a,\ n = 1, 2, \ldots$) и говорят, что члены последовательности $\{x_n\}$ стремятся к a.

С помощью логических символов существования и всеобщности определение предела записывается следующим образом:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon: \quad \forall n > n_\varepsilon \quad x_n \in U(a;\varepsilon). \tag{5.2}$$

Если предел последовательности действительных чисел является конечной точкой числовой прямой, т. е. числом, то говорят, что последовательность *имеет конечный предел.*

Определение 2. Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она называется *сходящейся.*

Для случая конечного предела определение 1 предела можно перефразировать следующим образом.

Число a является пределом последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

В логических символах эта формулировка выглядит следующим образом:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon: \ |x_n - a| < \varepsilon. \tag{5.4}$$

Очевидно, что неравенство (5.3) равносильно неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{5.5}$$

Аналогичным образом формулируются и определения предела числовой последовательности в случае, когда этот предел является той или иной бесконечно удаленной точкой (или, как говорят, равен бесконечности).

Например, согласно определению (5.2) ∞ является пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется включение

$$x_n \in U(\infty; \varepsilon), \tag{5.6}$$

или, что то же самое, неравенство

$$|x_n| > 1/\varepsilon. \tag{5.7}$$

В логических символах это утверждение записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \colon \quad |x_n| > 1/\varepsilon. \tag{5.8}$$

Аналогичным образом определение предела последовательности перефразируется для случая, когда этот предел равен бесконечности со знаком. Для краткости ограничимся записью этих определений только с помощью логических символов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \colon \quad x_n > 1/\varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \colon \quad x_n < -1/\varepsilon.$$

Заметим, что если ε — произвольное положительное число, то и $1/\varepsilon$ — также произвольное положительное число.

Очевидно, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Определение 3. Последовательность, пределом которой является бесконечность (со знаком или без знака), называется *бесконечно большой.*

Примеры. 1. Последовательность $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится и имеет своим пределом нуль. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, согласно принципу Архимеда существует натуральное n_ε, большее, чем $1/\varepsilon$, т. е. $n_\varepsilon > 1/\varepsilon$ и, следовательно, $1/n_\varepsilon < \varepsilon$, а тогда для всех натуральных $n > n_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Таким образом, при $n > n_\varepsilon$ выполняется условие

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, не имеет предела, так как какое бы число a ни взять, вне любой его ε-окрестности при $\varepsilon < 1$ будет находиться бесконечно много членов указанной последовательности.

3. Последовательность $x_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно большая и $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. В самом деле, согласно принципу Архимеда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_ε, что $n_\varepsilon > 1/\varepsilon$. Для любого же номера $n > 1$, очевидно, имеет место неравенство $n^2 > n$, поэтому при $n > n_\varepsilon$ выполняется условие

$$n^2 > n > n_\varepsilon > 1/\varepsilon,$$

т. е. если $n > n_\varepsilon$, то $n^2 > 1/\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

4. Докажем, что если $a > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0. \tag{5.9}$$

$\triangleright$ В самом деле, положим $\alpha = a - 1$; тогда $\alpha > 0$ и по формуле бинома Ньютона

$$a^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n > n\alpha. \tag{5.10}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что $n_0 > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$. Поэтому для всех $n > n_0$ имеем

$$a^n \underset{(5.10)}{>} n\alpha > n_0\alpha > \frac{1}{\varepsilon} \tag{5.11}$$

и

$$\frac{1}{a^n} < \varepsilon. \tag{5.12}$$

А это по определению предела и означает справедливость равенств (5.9). $\triangleleft$

Определение предела числовой последовательности обобщается на последовательности точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$, т. е. числовой прямой, дополненной отрицательной $(-\infty)$ и положительной $(+\infty)$ бесконечностями (п. 2.2). По форме оно полностью совпадает с определением 1.

Определение 4. Точка a расширенной числовой прямой называется *предeлом* последовательности точек этой прямой, если какова

бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены рассматриваемой последовательности, начиная с некоторого номера.

Отличие от вышерассмотренного случая состоит в том, что здесь членами последовательности могут быть не только действительные числа, но и бесконечности со знаками.

Конечно, понятие предела можно обобщить и на случай последовательности точек прямой, расширенной с помощью только одной бесконечно удаленной точки — бесконечности без знака, однако в дальнейшем у нас такие последовательности не будут встречаться.

5.2. Единственность предела последовательности. Докажем теорему о единственности предела последовательности.

Теорема 1. *Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.*

$\triangleright$ Допустим противное. Пусть существует такая последовательность $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, ...$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$, $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$. Возьмем какие-либо непересекающиеся окрестности $U = U(a)$ и $V = V(b)$ точек a и b (рис. 49): $U \cap V = \varnothing$. Согласно определению предела вне окрестности U точки a, в частности, в окрестности V точки b, содержится лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Однако точка b также является ее пределом, и потому в ее окрестности V должны находиться все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, а следовательно, бесконечно много ее членов. Получилось противоречие. $\triangleleft$

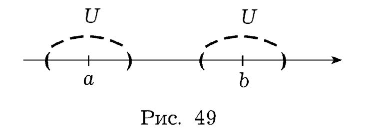


Рис. 49

5.3. Переход к пределу в неравенствах. Сформулируем и докажем три часто используемые свойства пределов последовательностей точек расширенной числовой прямой, связанные с равенствами и неравенствами для членов последовательностей.

1°. *Если для всех $n = 1, 2, ...$ имеет место равенство $x_n = a \in \overline{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

$\triangleright$ Действительно, в этом случае для любой окрестности $U(a)$ точки a в качестве номера n_ε, указанного в определении предела последовательности, можно взять $n_\varepsilon = 1$, так как для всех $n = 1, 2, ...$ имеет место включение

$$x_n = a \in U(a). \quad \triangleleft$$

2°. *Если* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $z_n \in \overline{R}$,

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.13}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \in \overline{R}, \tag{5.14}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a. \tag{5.15}$$

$\triangleright$ Зафиксируем произвольно окрестность $U(a)$ точки a. В силу условий (5.14) существует такой номер n_1, что для всех номеров $n > n_1$ выполняется включение

$$x_n \in U(a), \tag{5.16}$$

и такой номер n_2, что для всех номеров $n > n_2$ выполняется включение

$$z_n \in U(a). \tag{5.17}$$

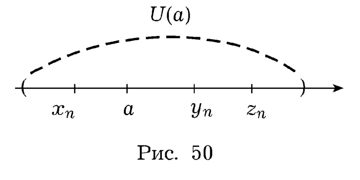


Рис. 50

Положим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда при $n > n_0$ будут одновременно выполняться включения (5.16) и (5.17), а следовательно, $[x_n, z_n] \in U(a)$ (рис. 50). Но в силу условия (5.13) $y_n \in [x_n, z_n]$, поэтому для всех $n > n_0$ будет выполняться включение $y_n \in U(a)$, а это и означает справедливость утверждения (5.15). $\triangleleft$

Следствие. *Если* $x_n \leqslant y_n$, $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, ...,$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \tag{5.18}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \tag{5.19}$$

а если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

$\triangleright$ Пусть выполнено условие (5.18). Рассмотрим вспомогательную последовательность $z_n = +\infty$, $n = 1, 2, ...$; тогда, очевидно, для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ выполняются условия (5.13) и (5.14) при $a = +\infty$, а поэтому в силу (5.15) имеет место и равенство (5.19). Аналогично рассматривается и случай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. $\triangleleft$

3°. *Если* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, ...,$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \tag{5.20}$$

и

$$a < b, \quad a \in \overline{R}, \quad b \in \overline{R}, \tag{5.21}$$

то существует такой номер n_0, *что для всех номеров* $n > n_0$ *выполняется неравенство*

$$x_n < y_n. \tag{5.22}$$

$\triangleright$ Пусть $U = U(a)$ и $V = V(b)$ — какие-либо непересекающиеся окрестности точек a и b (см. рис. 49); тогда из условия $a < b$ следует, что для любых $x \in U$ и $y \in V$ выполняется неравенство

$$x < y. \tag{5.23}$$

В силу условия (5.20) существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняются включения

$$x_n \in U, \quad y_n \in V, \tag{5.24}$$

а поэтому согласно (5.23) имеют место неравенства (5.22). $\triangleleft$

Следствие 1. *Пусть* a, b *и* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *принадлежат* $\overline{R}$. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < b$ $(a > b)$, *то существует такой номер* n_0, *что для всех номеров* $n > n_0$ *выполняется неравенство*

$$x_n < b \quad (\textit{соответственно } x_n > b). \tag{5.25}$$

$\triangleright$ Пусть $a < b$. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = b$, $n = 1, 2, \ldots$; тогда для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ выполняются условия (5.20) и (5.21), а следовательно, и условие (5.22), которое в данном случае превращается в (5.25). Аналогично рассматривается случай $a > b$. $\triangleleft$

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$, *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$x_n \geqslant y_n, \tag{5.26}$$

то

$$a \geqslant b. \tag{5.27}$$

$\triangleright$ Пусть выполнено условие (5.26). Если бы оказалось, что $a < b$, согласно свойству 3° нашелся бы такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполнялось бы неравенство $x_n < y_n$, что противоречит условию (5.26). Следовательно, выполняется неравенство (5.27). $\triangleleft$

Из следствия 2, в частности, вытекает, что если $x_n \geqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то имеет место неравенство $a \geqslant b$.

$\triangleright$ В самом деле, если взять вспомогательную стационарную последовательность $y_n = b$, $n = 1, 2, \ldots$, то для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ будут выполняться условия следствия 2, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{R}$, $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$x_n \geqslant b = y_n.$$

Поэтому согласно следствию 2 имеет место и неравенство

$$a \geqslant b. \ \triangleleft \tag{5.28}$$

Следствие 2 означает, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$, то в неравенствах $x_n > y_n$ и $x_n \geqslant y_n$ можно переходить к пределу, причем даже в первом случае в результате получается, вообще говоря, нестрогое неравенство

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Пример. Если для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется включение $x_n \in U(a, 1/n)$, $x_n \in R$, где либо $a \in R$, либо $a = \infty$, либо $a = +\infty$, либо $a = -\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

$\triangleright$ В самом деле, если $a \in R$, то условие $x_n \in U(a, 1/n)$ равносильно условию $|x_n - a| < 1/n$, а так как $|x_n - a| \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, то согласно свойству 2° имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$. Отсюда сразу и следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Если $a = \infty$, то условие $x_n \in U(a, 1/n)$ равносильно условию $|x_n| > n$. Отсюда в силу следствия из свойства 2° имеем $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Аналогично рассматриваются случаи $a = +\infty$ и $a = -\infty$. $\triangleleft$

В дальнейшем в этом параграфе будут рассматриваться только последовательности, все члены которых являются числами, т. е. только числовые последовательности, а не последовательности элементов расширенной числовой прямой, как это делалось выше.

5.4. Ограниченность сходящихся последовательностей.

Определение 5. Числовая последовательность называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если множество ее значений ограничено сверху (снизу).

Иначе говоря, числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), если существует такое число $c \in R$, что для всех номеров n выполняется неравенство $x_n \leqslant c$ (соответственно неравенство $x_n \geqslant c$).

Последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу, называется *ограниченной*.

Таким образом, числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если существуют такие числа $a \in R$ и $b \in R$, что для всех номеров n выполняется условие $a \leqslant x_n \leqslant b$. Это условие, очевидно, равносильно тому, что существует такое число $c > 0$, что для всех номеров n имеет место неравенство

$$|x_n| \leqslant c.$$

Последовательность, не являющаяся ограниченной сверху (снизу), называется *неограниченной сверху* (*снизу*), а последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченой*. Примером неограниченных последовательностей являются бесконечно большие последовательности (см. п. 5.1, определение 3). Следует заметить, однако, что не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Так, последовательность

$$x_n = (-1)^n n + n$$

неограниченная, но не бесконечно большая.

Теорема 2. *Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

▷ Пусть последовательность $x_n \in R$, $n = 1, 2, ...$, имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$. Тогда согласно определению предела последовательности (см. п. 5.1, определение 1), взяв $\varepsilon = 1$, получим, что существует такой номер n_1, что для всех номеров $n > n_1$ будет выполняться неравенство

$$|x_n - a| < 1 \tag{5.29}$$

x_1 $a-1$ x_{n_0+1} a $a+1$ x_{n_0}

Рис. 51

(в определении предела последовательности можно взять любое $\varepsilon > 0$; мы взяли $\varepsilon = 1$; рис. 51). Обозначим через d наибольшее из чисел 1, $|x_1 - a|$, ..., $|x_{n_1} - a|$. Тогда, очевидно, в силу условия (5.29) для всех $n \in N$ будет иметь место неравенство

$$|x_n - a| \leqslant d,$$

или, что равносильно,

$$a - d \leqslant x_n \leqslant a + d.$$

Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ◁

5.5. Бесконечно малые последовательности. Над числовыми последовательностями можно производить арифметические операции. Определим их.

Определение 6. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — числовые последовательности. Тогда числовая последовательность $\{x_n + y_n\}$ называется их *суммой* $\{x_n\} + \{y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ — их *разностью* $\{x_n\} - \{y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ — их *произведением* $\{x_n\}\{y_n\}$, а если для всех номеров n выполняется неравенство $y_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ называется *частным* $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$ данных последовательностей.

Если λ — действительное число, то *произведением* $\lambda\{x_n\}$ *числовой последовательности* $\{x_n\}$ *на число* λ называется последовательность $\{\lambda x_n\}$. Таким образом, получается тот же результат, что и от умножения стационарной последовательности $\{\lambda\}$ на последовательность $\{x_n\}$:

$$\lambda\{x_n\} = \{\lambda x_n\} = \{\lambda\}\{x_n\}.$$

Определение 1. Числовая последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой.*

Рассмотрим свойства бесконечно малых.

1°. *Любая конечная линейная комбинация бесконечно малых является бесконечно малой.*

▷ Пусть числовые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \tag{5.30}$$

а λ и μ — какие-либо действительные числа. Покажем, что последовательность $\{\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\}$ также бесконечно малая. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и возьмем какое-либо число c такое, что

$$c > |\lambda| + |\mu|. \tag{5.31}$$

Тогда, согласно определению предела, из (5.30) следует, что существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняются неравенства

$$|\alpha_n| < \varepsilon/c, \quad |\beta_n| < \varepsilon/c \tag{5.32}$$

и, следовательно, неравенство

$$|\lambda\alpha_n + \mu\beta_n| \leqslant |\lambda||\alpha_n| + |\mu||\beta_n| \underset{(5.32)}{<} \frac{|\lambda| + |\mu|}{c}\varepsilon \underset{(5.31)}{<} \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = 0,$$

т. е. что последовательность $\{\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\}$ бесконечно малая. Соответствующее утверждение для любой конечной линейной комбинации бесконечно малых следует из доказанного методом математической индукции. ◁

2° *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой.*

▷ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \tag{5.33}$$

и $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е. существует такое $c > 0$, что для всех номеров n выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant c. \tag{5.34}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда согласно определению предела из условия (5.33) следует, что существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon/c, \tag{5.35}$$

а следовательно, и неравенство

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n||x_n| \underset{\substack{(5.34)\\(5.35)}}{<} \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0$, т. е. что последовательность $\{a_n x_n\}$ бесконечно малая. ◁

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.*

$\triangleright$ Если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, то зоследовательность $\{\beta_n\}$, имея конечный предел, является ограниченной последовательностью. Поэтому произведение $\{\alpha_n\beta_n\}$ бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ можно рассматривать как произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность, и, следовательно, согласно свойству 2° это произведение является бесконечно малой последовательностью.

Соответствующее утверждение для любого конечного числа бесконечно малых последовательностей получается из данного методом математической индукции. $\triangleleft$

5.6. Свойства пределов, связанные с арифметическими действиями над числовыми последовательностями. Бесконечно малые последовательности играют в теории пределов особую роль, так как понятие конечного предела последовательности можно в определенном смысле свести к понятию бесконечно малой. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 1. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный числу a, тогда и только тогда, когда последовательность*
$$\alpha_n = x_n - a, \quad n = 1, 2, ...,$$
является бесконечно малой:
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{5.36}$$

$\triangleright$ Пусть заданы числовая последовательность $\{x_n\}$ и число a. Если $\alpha_n = x_n - a$, то условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ согласно определению предела последовательности равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, а это равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т. е. тому, что последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая. $\triangleleft$

Утверждение леммы можно перефразировать следующим образом: число a является пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Рассмотрим свойства пределов числовых последовательностей.

1°. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то сходится и последовательность $\{|x_n|\}$, причем, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то*
$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|. \tag{5.37}$$

$\triangleright$ Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, а

поскольку $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$, то выполняется и неравенство

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (5.37). ◁

2°. *Конечная линейная комбинация сходящихся последовательностей также является сходящейся последовательностью, и ее предел равен такой же линейной комбинации пределов данных последовательностей.*

▷ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in R, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \in R. \tag{5.38}$$

Тогда в силу необходимости условий (5.36) для существования соответствующих конечных пределов члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.39}$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0. \tag{5.40}$$

Пусть теперь λ и μ — какие-либо числа. Тогда члены последовательности $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ представимы в виде

$$\lambda x_n + \mu y_n \underset{(5.39)}{=} \lambda a + \mu b + \lambda\alpha_n + \mu\beta_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.41}$$

где последовательность $\{\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\}$ в силу бесконечной малости последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ также бесконечная малая (см. свойство 1° бесконечно малых последовательностей в п. 5.5):

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) \underset{(5.40)}{=} 0. \tag{5.42}$$

Поэтому в силу достаточности условий (5.36) для существования соответствующего конечного предела из равенств (5.41) следует, что последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ имеет предел, равный $\lambda a + \mu b$:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b,$$

или (см. (5.38))

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{5.43}$$

Соответствующее утверждение для любой конечной линейной комбинации сходящихся последовательностей получается из доказанного методом математической индукции. ◁

3°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то их произведение $\{x_n y_n\}$ также сходится:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{5.44}$$

т. е. предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов данных последовательностей.

$\triangleright$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in R$; тогда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Поэтому

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n), \tag{5.45}$$

причем последовательность $\{b\alpha_n + a\beta_n\}$ бесконечно малая как линейная комбинация бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, а последовательность $\{\alpha_n\beta_n\}$ бесконечно малая как произведение тех же последовательностей, поэтому бесконечно малой является и их сумма $\{b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n) = 0. \tag{5.46}$$

Из равенств (5.45) и (5.46) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n. \quad \triangleleft$$

С л е д с т в и е. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся и m — натуральное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^m = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^m.$$

Это непосредственно следует из свойства 3°, так как возведение числа в целую положительную степень m сводится к повторному умножению на это число m раз.

4°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, для всех номеров n имеет место неравенство $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

т. е. при сделанных предположениях предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

$\triangleright$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in R$, $b \neq 0$, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ согласно свойству 1° следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |b|$. Поскольку $|b| > 0$ (ибо $b \neq 0$) и $0 < |b|/2 < |b|$, то согласно следствию 1 из свойства 3° пределов последовательностей (п. 5.3) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|y_n| > |b|/2$ и, следовательно, неравенство

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \tag{5.47}$$

(поскольку все $y_n \neq 0$, то на y_n можно делить).

Теперь имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n). \tag{5.48}$$

Здесь последовательность

$$\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right\}$$

ограничена, ибо для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right| = \frac{1}{|b||y_n|} \underset{(5.47)}{<} \frac{2}{|b|^2},$$

а последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ бесконечно малая как линейная комбинация бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Поэтому бесконечно малой является и последовательность

$$\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)\right\}$$

как произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую.

Следовательно, из равенства (5.48) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \quad \triangleleft$$

5.7. Монотонные последовательности.

Определение 8. Верхняя (нижняя) грань множества значений числовой последовательности $\{x_n\}$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* этой последовательности и обозначается $\sup\{x_n\}$ (*соответственно* $\inf\{x_n\}$).

Иначе говоря, если $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, и если $\beta = \sup\{x_n\}$, то:

1) для всех $n \in N$ имеет место неравенство $x_n \leqslant \beta$;

2) для любого $\beta' < \beta$ существует такое $n_0 \in N$, что $x_{n_0} > \beta'$.

Аналогично, если $\alpha = \inf\{x_n\}$, то:

1) для всех $n \in N$ имеет место неравенство $x_n \geqslant \alpha$;

2) для любого $\alpha' > \alpha$ существует такое $n_0 \in N$, что $x_{n_0} < \alpha'$.

Примеры.

1. $\sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$, $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.

2. $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$.

Определение 9. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для всех $n \in N$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно неравенство $x_n \geqslant x_{n+1}$).

Возрастающая (убывающая) последовательность обозначается $x_n \uparrow$ (соответственно $x_n \downarrow$). Если возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел, равный a, то пишут $x_n \uparrow a$ (соответственно $x_n \downarrow a$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), если для всех $n \in N$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно неравенство $x_n > x_{n+1}$). Строго возрастающая (строго убывающая) последовательность обозначается $x_n \uparrow\uparrow$ (соответственно $x_n \downarrow\downarrow$).

Убывающие и возрастающие последовательности называются *монотонными*, а строго убывающие и строго возрастающие — *строго монотонными*.

Примеры.

3. Последовательность $\{1/n\}$ строго убывает.

4. Последовательность $\{n\}$ строго возрастает.

5. Последовательность $\{(-1)^n\}$ немонотонная.

Теорема 3 (Вейерштрасс*)). *Всякая возрастающая числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел: конечный, если она ограничена сверху, и бесконечный, если она неограничена сверху, причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}. \tag{5.49}$$

Аналогично, если $\{x_n\}$ — убывающая последовательность, то существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}, \tag{5.50}$$

и, следовательно, этот предел конечен, если последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, и бесконечен, если она неограничена снизу.

$\triangleright$ Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Докажем равенство (5.49). Остальные утверждения теоремы для возрастающих последовательностей следуют из него очевидным образом.

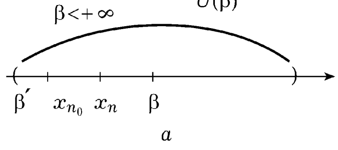
Пусть $\beta = \sup\{x_n\}$, значение β может быть как конечным, так и бесконечным. Возьмем произвольную окрестность $U(\beta)$ точки β и обозначим через β' ее левый конец (рис. 52). Очевидно, $\beta' < \beta$. Согласно определению верхней грани:

1) для любого номера $n \in N$ имеет место неравенство

$$x_n \leqslant \beta; \tag{5.51}$$

2) существует такой номер n_0, что

$$x_{n_0} > \beta'. \tag{5.52}$$



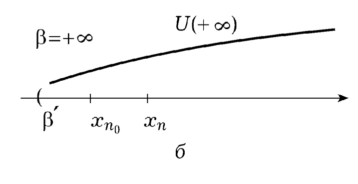


Рис. 52

В силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ из (5.51) и (5.52)

*) К. Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик.

следует, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\beta' < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant \beta, \tag{5.53}$$

и поскольку $(\beta', \beta] \subset U(\beta)$, то при $n > n_0$ имеет место включение

$$x_n \in U(\beta), \tag{5.54}$$

а это и означает, что β является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Аналогично рассматривается случай $x_n \downarrow$. $\triangleleft$

Замечание. Если $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...,$ — система вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, а ξ — точка, принадлежащая всем отрезкам этой системы, то

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{5.55}$$

В самом деле, последовательность $\{a_n\}$ возрастает, а $\{b_n\}$ убывает, кроме того (см. (4.25) в п. 4.5), было показано, что $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. Поэтому равенство (5.55) сразу следует из теоремы 3.

Пример 6 (число e). Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.56}$$

и покажем, что она строго возрастает и ограничена сверху, а следовательно, согласно теореме 3 имеет конечный предел.

Применив формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + ... \\ ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + ... + \frac{n(n-1)...1}{n!}\frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + ... \\ ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{5.57}$$

Из выражения, стоящего в правой части равенства, видно, что при переходе от n к $n+1$ число слагаемых (которые все положительны) в написанной сумме возрастает на единицу и каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличивается, так как становится больше выражение, стоящее в каждых круглых скобках, ибо

$$1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, ..., n-1, \quad n = 2, 3, ...$$

Это означает строгое возрастание последовательности (5.56):

$$x_n < x_{n+1}, \quad n = 1, 2, ... \tag{5.58}$$

Далее, поскольку

$$1 - \frac{s}{n} < 1, \quad s = 1, 2, ..., n-1, \quad n = 2, 3, ..., \tag{5.59}$$

$$2^{n-1} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ сомножителей}} \leqslant 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!,$$

и поэтому

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.60}$$

то при $n > 1$ из равенства (5.57) получим

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < \\ < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3$$

(мы заменили сумму конечной геометрической прогрессии суммой бесконечной геометрической прогрессии, так как у последней проще формула). Итак,

$$x_n < 3, \tag{5.61}$$

т. е. последовательность (5.56) ограничена сверху. Из (5.58) и (5.61) следует, что она имеет конечный предел. Он обозначается через e:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{5.62}$$

Поскольку $2 < x_n < 3$ и $x_n \uparrow$, то $2 < e \leqslant 3$. Можно показать, что e — иррациональное число и что с точностью до 10^{-15}

$$e \approx 2,718\,281\,828\,459\,045.$$

5.8. Принцип компактности. Если дана последовательность $\{x_n\}$ и из некоторых ее членов x_{n_k}, взятых в порядке возрастания номеров n_k ($k > k'$ равносильно $n_k > n_{k'}$), составлена новая последовательность $\{x_{n_k}\}$, то она называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

В подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ k является номером члена этой последовательности, а n_k — его номером в исходной последовательности. Ясно, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $n_k \geqslant k$, и поэтому $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = +\infty$.

Подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным наборам номеров $\{n_k\}$. Различные подпоследовательности одной и той же последовательности, рассматриваемые как последовательности, могут оказаться одинаковыми. Так, последовательность $x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, как и любая последовательность, имеет бесконечно много различных подпоследовательностей (можно, например, выбрать четные номера, нечетные, кратные трем, четырем и т. д.), но все эти подпоследовательности как последовательности совпадают, очевидно, с данной последовательностью $x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Выше было показано (см. п. 5.4), что если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена. Обратное, конечно, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, ...$, ограничена, но не имеет предела. Вместе с тем, если вся ограниченная последовательность не имеет предела, то у нее всегда существует подпоследовательность, которая имеет предел. Точнее, имеет место следующий факт.

Теорема 4. *Из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной сверху (неограниченной снизу) числовой последовательности — последовательность, имеющую своим пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$).*

$\triangleright$ Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существуют такие $a \in R$ и $b \in R$, что для всех номеров n выполняется неравенство $a \leqslant x_n \leqslant b$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$. Тогда по крайней мере на одном из них — обозначим его $[a_1, b_1]$ — окажется бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Выберем произвольно какой-либо член этой последовательности, содержащийся в отрезке $[a_1, b_1]$. Пусть его номер равен n_1:

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1], \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}. \tag{5.63}$$

Снова разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка и тот из них, на котором лежит бесконечно много членов последовательности (по крайней мере для одного из них это условие выполняется), обозначим $[a_2, b_2]$. Поскольку на отрезке $[a_2, b_2]$ лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, то среди них заведомо есть члены с номерами, большими чем n_1. Выберем один из таких членов. Если его номер n_2, то

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \quad n_2 > n_1, \tag{5.64}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}. \tag{5.65}$$

Продолжая этот процесс, получим такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ (т. е. $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$) последовательности $\{x_n\}$, что

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k, \tag{5.66}$$

$$[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}], \tag{5.67}$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{5.68}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^k} = 0$.

В результате получилась система вложенных отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, длины которых стремятся к нулю. Поэтому (см. п. 4.5) существует единственная точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам, причем (см. (5.55)) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$, а тогда в силу свойства 2° пределов (см. п. 5.3) из неравенства (5.66) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

Это означает, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет конечный предел, т. е. сходится.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, не ограничена сверху. Тогда существует такой номер n_1, что $x_{n_1} > 1$. Поскольку последовательность $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots$, получающаяся из данной последовательности $\{x_n\}$ отбрасыванием конечного числа ее членов $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n_1}$, также не ограничена сверху, то найдется такой номер $n_2 > n_1$, что $x_{n_2} > 2$. Продолжая этот процесс, получим такие члены x_{n_k} последовательности $\{x_n\}$, что

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots, \tag{5.69}$$

$$x_{n_k} > k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.70}$$

Условие (5.69) означает, что последовательность $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, а из условия (5.70) в силу следствия свойства 2° пределов (п. 5.3) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty. \tag{5.71}$$

Аналогично рассматривается случай последовательности, не ограниченной снизу. $\lhd$

З а м е ч а н и е 1. Первое утверждение теоремы 4, т. е. то, что из всякой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся, называется *теоремой Больцано–Вейерштрасса**) или *принципом компактности отрезка.*

З а м е ч а н и е 2. Поскольку всякая неограниченная последовательность не ограничена по крайней мере либо сверху, либо снизу, то из второго утверждения теоремы 4 следует, что всякая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность, причем ее всегда можно выбрать таким образом, что ее пределом будет являться бесконечность со знаком.

О п р е д е л е н и е 10. Предел, конечный или определенного знака бесконечный, подпоследовательности числовой последовательности называется *частичным пределом* этой последовательности.

Из теоремы 4 следует, что у любой числовой последовательности всегда существует по крайней мере один частичный предел (заведомо конечный, если последовательность ограничена, и бесконечный, если она не ограничена).

---

*) Б. Больцано (1781–1848) — чешский математик.

5.9. Критерий Коши. В этом пункте дается критерий*) сходимости последовательности, т. е. критерий существования у нее конечного предела, в терминах только самих членов данной последовательности, иначе говоря, без привлечения значения самого предела.

Определение 11. Числовая последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *фундаментальной последовательностью*, если она удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{5.72}$$

Это условие называется *условием Коши***). Его можно записать в несколько другом виде: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{5.73}$$

Чтобы убедиться в равносильности этих утверждений, достаточно заметить, что из двух номеров m и n всегда один не превышает другого, например, $m \geqslant n$, и тогда, положив $p = m - n$, мы перейдем от записи (5.73) к записи (5.72).

Докажем несколько лемм о фундаментальных последовательностях.

Лемма 2. *Если последовательность имеет конечный предел, то она фундаментальная.*

$\triangleright$ Действительно, если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся и a — ее предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то согласно определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon/2. \tag{5.74}$$

Поэтому если $m > n_0$ и $n > n_0$, то

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| \underset{(5.74)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \triangleleft$$

Лемма 3. *Если последовательность фундаментальная, то она ограниченная.*

$\triangleright$ Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Тогда согласно условию Коши существует такой номер n_0, что для всех $m > n_0$ и $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|x_n - x_m| < 1 \tag{5.75}$$

(в условии Коши (см. определение 11) можно взять любое $\varepsilon > 0$; мы взяли здесь $\varepsilon = 1$). В частности, при $m = n_0 + 1$ из (5.75) следует,

---

*) Термин “критерий” употреблен здесь в смысле “необходимое и достаточное условие”.

**) О. Коши (1789–1857) — французский математик.

что $|x_n - x_{n_0+1}| < 1$, или

$$x_{n_0+1} - 1 < x_n < x_{n_0+1} + 1, \quad n = n_0+1, n_0+2, \ldots,$$

т. е. последовательность $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$, получающаяся из данной последовательности $\{x_n\}$ отбрасыванием первых ее n_0 членов $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n_0}$, является ограниченной последовательностью. Поэтому ограничена, очевидно, и вся последовательность $\{x_n\}$. ◁

Лемма 4. *Если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то ее предел является и пределом всей последовательности.*

▷ Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, $\{x_{n_k}\}$ — ее сходящаяся подпоследовательность и

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a. \tag{5.76}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно условию Коши существует такой номер n_0, что для всех $n, m > n_0$ выполнятся неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2. \tag{5.77}$$

Выберем теперь номер k_0 так, чтобы при всех $k > k_0$ имело место неравенство

$$n_k > n_0 \tag{5.78}$$

(это возможно сделать в силу того, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$). Тогда при всех $n > n_0$ и $k > k_0$ справедливо неравенство

$$|x_n - x_{n_k}| \underset{\substack{(5.77)\\(5.78)}}{<} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя здесь к пределу при $k \to \infty$, в силу условия (5.76) получим, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = a$. ◁

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

▷ Действительно, необходимость выполнения условия Коши для сходящейся последовательности составляет содержание леммы 2.

Если же последовательность удовлетворяет условию Коши, т. е. является фундаментальной, то согласно лемме 3 она ограничена, и, следовательно, в силу принципа компактности (см. теорему 4) из нее можно выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел. Тогда из леммы 4 следует, что вся заданная последовательность сходится к тому же пределу. ◁

Упражнение. Доказать, что не всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел имеет рациональный предел.

5.10*. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Пусть задано действительное число $a \geqslant 0$. В силу принципа Архимеда существует натуральное число $n > a$. В множестве чисел $1, 2, ..., n$ возьмем наименьшее среди тех, которые больше числа a, т. е. такое натуральное число n_0, что

$$n_0 - 1 \leqslant a < n_0.$$

Обозначим $n_0 - 1$ через α_0, а отрезок $[\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ — через I_0. Тогда

$$a \in I_0 = [\alpha_0;\ \alpha_0 + 1], \quad a \neq \alpha_0 + 1$$

(поскольку в этом пункте концы отрезков будут обозначаться десятичными дробями, то в качестве разделительного знака между концами отрезков удобнее употреблять не запятую, а точку с запятой, т. е. вместо $[a, b]$ писать $[a; b]$).

Разобьем отрезок I_0 на 10 равных отрезков и каждому отрезку слева направо припишем последовательно индексы $0, 1, 2, ..., 9$. Точ-

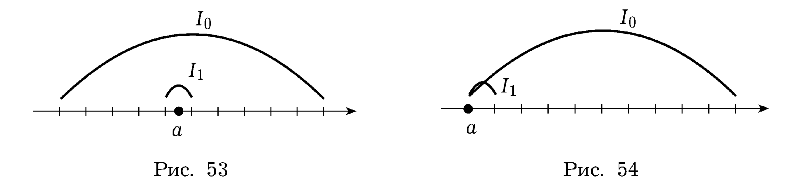


Рис. 53 Рис. 54

ка a либо принадлежит только одному из этих отрезков, обозначим его I_1 (рис. 53 и рис. 54), либо двум соседним, если она является их общим концом (рис. 55). В последнем случае для однозначности выбора отрезков обозначим через I_1 тот из двух соседних отрезков, для которого точка a является левым концом (целесообразность такого выбора будет пояснена ниже). Итак, в обоих случаях точка a лежит на отрезке I_1 и не является его правым концом.

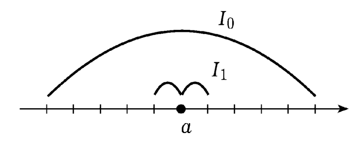


Рис. 55

Обозначим левый конец отрезка I_1 десятичной дробью α_0, α_1, где α_1 — индекс отрезка I_1 (одна из цифр $0, 1, 2, ..., 9$), тогда правый конец будет записываться числом $\alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}$. Таким образом,

$$a \in I_1 = [\alpha_0, \alpha_1;\ \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}], \quad a \neq \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}.$$

Разобьем отрезок I_1 в свою очередь на десять равных отрезков и обозначим через $I_2 = [\alpha_0, \alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + 10^{-2}]$ тот из них, который содержит точку a, причем она не является его правым концом. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ..., \tag{5.79}$$

содержащих точку a, причем она не является правым концом ни одного из них:

$$a \in I_n = [\alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n; \alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n + 10^{-n}],$$
$$a \neq \alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n + 10^{-n}, \quad n = 1, 2, ... \tag{5.80}$$

Поскольку длина отрезка I_n равна 10^{-n} и $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$, то точка a является единственной точкой, принадлежащей всем отрезкам I_n, $n = 1, 2, ...$ Отрезок I_n будем называть *отрезком ранга* n.

Таким образом, каждому действительному числу $a \geqslant 0$ однозначным образом поставлена в соответствие последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}$, длины которых стремятся к нулю. А именно, последовательность $\{I_n\}$, пересечение отрезков которой состоит из числа a:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}. \tag{5.81}$$

При этом разным числам оказываются поставленными в соответствие разные последовательности вложенных отрезков $\{I_n\}$, так как в силу стремления к нулю длин отрезков I_n пересечение рассматриваемой последовательности $\{I_n\}$ состоит из единственной точки a и, следовательно, разные точки числовой прямой принадлежат разным последовательностям $\{I_n\}$, т. е. на некотором n-м шаге они окажутся в разных отрезках ранга n.

Каждая последовательность $\{I_n\}$, очевидно, полностью описывается последовательностью своих левых концов $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n$ (правый конец получается добавлением числа 10^{-n} к левому концу), $n = 1, 2, ...$, а следовательно, и бесконечной десятичной дробью α_0, $\alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n ...$, так как левый конец каждого отрезка I_n получается из этой бесконечной десятичной дроби отбрасыванием всех ее цифр после запятой, начиная с $(n+1)$-й.

В результате каждому действительному числу $a \geqslant 0$ оказывается поставленной в соответствие указанным образом бесконечная десятичная дробь α_0, $\alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n ...$ Если числу a соответствует дробь α_0, $\alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n ...$, то пишут

$$a = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n ... \tag{5.82}$$

Подчеркнем, что в этой записи через a_0 обозначается соответствующее неотрицательное целое число, а через a_n, $n = 1, 2, ...$, — одна из цифр $0, 1, 2, ..., 9$.

Получающиеся в результате описанной конструкции бесконечные десятичные дроби (5.82) не могут иметь периода, состоящего только из цифры 9. В самом деле, пусть некоторому действительному числу соответствует дробь

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_{n_0} 99 ... 9 ..., \quad n_0 \geqslant 0, \tag{5.83}$$

имеющая период, состоящий из цифры 9 и начинающийся с $(n_0 + 1)$-го места после запятой. Обозначим через $\{I_n\}$ последовательность отрезков, соответствующих дроби (5.83) в том смысле, что

левым концом отрезка I_n, $n = 1, 2, ...$, этой последовательности является число $\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$, получающееся из дроби (5.83) отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го, а правым — число $\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n + 10^{-n}$. Такая последовательность отрезков является вложенной системой отрезков, длины которых стремятся к нулю, и, следовательно, существует единственное число a, принадлежащее всем отрезкам I_n этой системы. Поскольку в дроби (5.83), начиная с (n_0+1)-го места после запятой, стоит цифра 9, то точка a, начиная с отрезков ранга n_0+1, будет находиться на отрезке с индексом 9, т. е. на самом правом отрезке. Этим свойством обладает только правый конец отрезка I_{n_0}, таким образом, число a совпадает с правым концом отрезка I_{n_0}.

При описанной же конструкции соответствия чисел $a \geqslant 0$ и бесконечных десятичных дробей (см. (5.72)–(5.82)) всегда предполагалось, что число a не является правым концом ни одного из отрезков соответствующей ему системы вложенных отрезков $\{I_n\}$ (см. (5.79)) — в этом состояло одно из условий (5.80). Полученное противоречие показывает, что при указанной конструкции соответствия чисел $a \geqslant 0$ и бесконечных десятичных дробей не участвуют дроби вида (5.83), т. е. с периодом, состоящим из одной лишь цифры 9.

Вместе с тем каждая бесконечная десятичная дробь

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n..., \tag{5.84}$$

не имеющая периода, состоящего только из одной цифры 9, оказывается поставленной в соответствие единственному числу $a \geqslant 0$, являющемуся точкой пересечения отрезков

$$I_n = [\alpha_0,\ \alpha_1...\alpha_n;\ \alpha_0,\ \alpha_1...\alpha_n + 10^{-n}], \quad n = 1, 2, ... \tag{5.85}$$

В самом деле, последовательность отрезков (5.85) является вложенной системой отрезков, длины которых 10^{-n} стремятся к нулю, а потому существует единственное число a, принадлежащее всем отрезкам $a \in I_n$, $n = 1, 2, ...$

Покажем, что дробь (5.84) поставлена в соответствие этому числу a, т. е. что выполнены условия (5.79)–(5.81). Очевидно, следует лишь показать, что число a не является правым концом ни одного из отрезков I_n. Если бы оказалось, что число a является правым концом некоторого отрезка I_{n_0} ранга n_0 системы $\{I_n\}$, то число a было бы и правым концом всех отрезков I_n ранга $n > n_0$, т. е. принадлежало бы отрезкам ранга $n > n_0$ с индексом 9. Это означает, что в дроби (5.84), начиная с (n_0+1)-го места после запятой, все время стоит цифра 9 — противоречие. Итак, действительно, каждая бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода, состоящего из одной цифры 9, поставлена в соответствие некоторому числу $a \geqslant 0$.

В результате установлено взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными действительными числами и всеми

бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода, состоящего только из цифры 9.

Бесконечные десятичные дроби с периодом, состоящим только из нуля, обычно записываются в виде конечной десятичной дроби, т. е. вместо $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n 00...0...$ пишут $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$.

Подчеркнем, что при конструкции соответствия (5.79)–(5.82) между неотрицательными действительными числами и десятичными дробями это соответствие оказалось взаимно однозначным в силу того, что рассматривались лишь десятичные дроби, не имеющие периода, состоящего только из цифры 9, и требовалось, чтобы никакое a не являлось правым концом ни одного отрезка I_n соответствующей этому числу a системы $\{I_n\}$. При отказе от выполнения этих условий для каждого числа, являющегося концом некоторого отрезка ранга n, существовали бы две его записи в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\alpha_0, \alpha_1...\alpha_n 99...9... = \alpha_0, \alpha_1...(\alpha_n + 1)00...0..., \quad \alpha_n \neq 9,$$

например,

$$1 = 1,00...0 = 0,99...9...$$

Если $a > 0$ и a соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, то отрицательному числу $-a$ поставим в соответствие ту же дробь, только со знаком минус, и будем писать

$$-a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \tag{5.86}$$

Запись действительных чисел в виде (5.82) и (5.86) называется их *десятичной записью.*

Бесконечные десятичные дроби $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, не имеющие периода, состоящего только из одних девяток, называются *допустимыми.*

Из всего сказанного видно, что десятичная запись действительных чисел устанавливает между всеми действительными числами и всеми допустимыми десятичными дробями взаимно однозначное соответствие.

Конечно, нужно не только уметь записывать каждое действительное число в виде десятичной дроби, но и уметь производить с помощью этой записи различные операции над числами: сравнивать их по величине, складывать, вычитать, умножать, делить и т.д. Перейдем к рассмотрению этих вопросов.

Пусть снова $a \geqslant 0$ и $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ Введем обозначения

$$\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1...\alpha_n, \quad \overline{a}_n = \underline{a}_n + 10^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.87}$$

Если же $a < 0$ и $a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, то положим

$$\underline{a}_n = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n - 10^{-n}, \quad \overline{a}_n = \underline{a}_n + 10^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.88}$$

Из этих формул сразу следует, что если $b < 0$ и $b = -a$, $a > 0$, то (рис. 56)

$$\underline{b}_n = -\overline{a}_n, \quad \overline{b}_n = -\underline{a}_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.89}$$

Конечная десятичная дробь $\underline{a}_n$ (как в случае (5.87), так и в случае (5.88)) называется *нижним десятичным приближением порядка* n *числа* a, а дробь $\overline{a}_n$ — его *верхним десятичным приближением* того же порядка. Очевидно, что в случае $a \geqslant 0$ конечные десятичные дроби $\underline{a}_n$ и $\overline{a}_n$ являются концами отрезка I_n (см. (5.80)) последовательности вложенных отрезков $\{I_n\}$, поставленной в соответствие числу $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, т. е.

$b=-a$ O a

$\underline{b}_n=-\overline{a}_n$ $\overline{b}_n=-\underline{a}_n$ $\underline{a}_n$ $\overline{a}_n$

Рис. 56

$$I_n = [\underline{a}_n, \overline{a}_n], \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.90}$$

и, таким образом,

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n, \quad n = 1, 2, ... \tag{5.91}$$

В силу соотношений (5.89) система отрезков (5.90) является системой вложенных отрезков и при $a < 0$; выполняется в этом случае и неравенство (5.91). Из того, что система отрезков (5.90) является системой вложенных отрезков, следует, что

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.92}$$

т. е. что последовательность нижних десятичных приближений представляет собой возрастающую последовательность, а верхних — убывающую.

Наконец, из (5.87) и (5.88) непосредственно следует, что

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n}, \tag{5.93}$$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$, то для любого действительного числа a последовательность отрезков (5.90) образует систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и единственной точкой пересечения которых является точка a. Отсюда имеем (см. замечание в п. 5.7)

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a. \tag{5.94}$$

Таким образом, доказано следующее свойство десятичных приближений.

1°. *Каково бы ни было действительное число* a, *последовательность его нижних десятичных приближений* $\{\underline{a}_n\}$ *возрастает, верхних* $\{\overline{a}_n\}$ *убывает, и имеет место равенство* (5.94).

С л е д с т в и е. *Всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.*

$\triangleright$ В самом деле, нижние и верхние десятичные приближения любого числа, представляя собой конечные десятичные дроби, являются рациональными числами, поэтому утверждение следствия непосредственно вытекает из равенства (5.94). $\triangleleft$

Перейдем теперь к сравнению по величине действительных чисел посредством их десятичной записи.

2°. *Если $a \in R$, $b \in R$, то $a < b$ в том и только том случае, когда существует такое неотрицательное целое число n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство*

$$\underline{a}_n < \underline{b}_n. \tag{5.95}$$

$\triangleright$ Если $a < b$, то из условия (5.94) согласно свойству 3° пределов (п. 5.3) сразу следует существование такого n_0, что для $n > n_0$ выполняется условие (5.95). Обратно, если существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство (5.95), то, перейдя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим $a \leqslant b$, но случай $a = b$ невозможен, так как тогда в силу однозначности десятичной записи чисел для всех $n = 0, 1, 2, ...$ имело бы место равенство $\underline{a}_n = \underline{b}_n$, что противоречило бы условию (5.95).

Следовательно, $a < b$. $\triangleleft$

С помощью арифметических операций над нижними и верхними десятичными приближениями чисел можно получить нужный результат соответствующих операций над самими числами с любой наперед заданной точностью. Это видно из следующего утверждения.

3°. *Если $a \in R$, $b \in R$, то*

$$\lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n + \underline{b}_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n - \underline{b}_n) = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \underline{b}_n = ab,$$

а при $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}.$$

$\triangleright$ Эти формулы сразу следуют из равенств (5.94) и свойств пределов числовых последовательностей (п. 5.6). Отметим лишь, что из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{b}_n = b \neq 0$ следует существование такого номера n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\underline{b}_n \neq 0$ (см. следствие 1 свойства 3° пределов, п. 5.3) и при рассмотрении предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$ берутся только дроби $\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$, для которых $\underline{b}_n \neq 0$, что заведомо имеет место при $n > n_0$. $\triangleleft$

5.11. Предел последовательности комплексных чисел. Многие из понятий, введенных для последовательностей действительных чисел, обобщаются на последовательности комплексных чисел, причем с сохранением ряда свойств.

Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности комплексных чисел* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|z_n - z_0| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу z_0.

Таким образом, по форме это определение совершенно такое же, как для предела последовательности действительных чисел, однако геометрический смысл его иной: на комплексной плоскости неравенство $|z - z_0| < \varepsilon$ задает открытый круг (т. е. круг без ограничивающей его окружности) радиуса ε с центром в точке z_0. Этот круг называется *ε-окрестностью* (или, короче, *окрестностью*) точки z_0; будем его обозначать $U = U(z_0, \varepsilon)$.

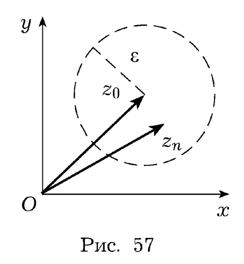


Рис. 57

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ означает, что, какова бы ни была окрестность U точки z_0, найдется такой номер n_0, что все члены последовательности $\{z_n\}$ с номерами, большими n_0, будут содержаться в этой окрестности (рис. 57). Тем самым вне этой окрестности будет находиться только конечное множество членов рассматриваемой последовательности.

Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ в силу самого определения предела равносильно существованию предела

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0, \tag{5.96}$$

т. е. сходимости к нулю последовательности действительных чисел $|z_n - z_0|$, $n = 1, 2, \ldots$

Если $z_n = x_n + y_n i$, $z_0 = x_0 + y_0 i$, $x_n, y_n, x_0, y_0 \in R$, то

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \tag{5.97}$$

и, следовательно,

$$|x_n - x_0| \leqslant |z - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leqslant |z - z_0|. \tag{5.98}$$

Из соотношений (5.97), (5.98) следует, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$ равносильно условиям $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Это означает, что последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + y_n i$, $n = 1, 2, \ldots$, имеет своим пределом число $z_0 = x_0 + y_0 i$ в том и только том случае, когда последовательности действительных $\{x_n\}$ и мнимых $\{y_n\}$

частей членов последовательности $\{z_n\}$ имеют своими пределами соответственно x_0 и y_0.

Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел называется *ограниченной*, если ограничена последовательность действительных чисел $\{|z_n|\}$ (т. е. если ограничена последовательность абсолютных величин членов данной последовательности).

На последовательности комплексных чисел обобщаются многие предложения, доказанные для последовательностей действительных чисел. Так, если последовательность комплексных чисел имеет предел, то он единствен; всякая последовательность комплексных чисел, имеющая предел, ограничена; из всякой ограниченной последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся; для последовательностей комплексных чисел имеет место аналог критерия Коши сходимости последовательностей действительных чисел; переносятся на последовательности комплексных чисел и свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями. Все это следует, например, из того, что сходимость последовательности комплексных чисел равносильна сходимости последовательностей их действительных и мнимых частей.

Аналогично случаю последовательностей действительных чисел для последовательностей комплексных чисел определяется и бесконечный предел (без знака, так как комплексные числа не имеют знака): $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ означает по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Замечание. Обычно, когда говорят, что некоторая последовательность комплексных (в частности, действительных) чисел имеет предел, то под этим подразумевают, что этот предел конечный, а случай бесконечного предела оговаривается особо.

§ 6. Предел и непрерывность функций

6.1. Первое определение предела функции. В дальнейшем под термином “элемент”, “точка” будет пониматься либо действительное число, либо одна из бесконечностей ∞, $+\infty$ и $-\infty$ (бесконечно удаленные точки).

Сформулируем сначала определение предела функции $f\colon X \to R$, $X \subset R$, в терминах пределов последовательностей. Это определение часто называют определением предела функции по Гейне*).

Определение 1. Точка a называется *пределом значений функции $f(x)$, $x \in X$* (или, короче, *пределом функции f*), в точке x_0 (или, что то же самое, при $x \to x_0$*)), если для любой последовательности

*) Г. Гейне (1821–1881) — немецкий математик.

*) Читается “при x, стремящемся к x_0”.

точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, имеющей своим пределом точку x_0, т. е. такой, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{6.1}$$

последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции f в точках x_n, $n = 1, 2, ...$, имеет своим пределом точку a, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a. \tag{6.2}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) \to a \quad \text{при} \quad x \to x_0, \tag{6.3}$$

а если x_0 — конечная точка: $x_0 \in R$, то также

$$\lim_{x - x_0 \to 0} f(x) = a.$$

В символической записи с помощью логических символов это определение выглядит следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{\forall x_n \in X, \quad n = 1, 2, ...: \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a\}. \tag{6.4}$$

Двоеточием здесь, как и раньше в символических формулах (см. п. 1.1), отделяются описания рассматриваемых в условии элементов. В данном случае рассматриваются элементы $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Если в формуле (6.4) a является числом, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 *конечный предел* (равный a).

Сформулированное определение предела при заданной функции $f(x)$, $x \in X$, содержательно только тогда, когда для точки x_0 существуют последовательности точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, имеющие своим пределом (конечным или бесконечным) точку x_0: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Определение 2. Пусть $X \in R$. Точка x_0, для которой существует последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, имеющая своим пределом точку x_0,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{6.5}$$

называется *точкой прикосновения множества* X.

Если точка прикосновения x_0 является одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то она называется также *бесконечно удаленной точкой прикосновения* (множества X). Очевидно, что точка $x_0 = \infty$ является бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X тогда и только тогда, когда множество X неограниченно, точка $x_0 = +\infty$ — тогда и только тогда, когда множество X неограниченно сверху, а $x_0 = -\infty$ — тогда и только тогда, когда X неограниченно снизу.

Очевидно, что любая точка x_0, принадлежащая самому множеству X, является его точкой прикосновения, так как стационарная последовательность $x_n = x_0 \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию (6.5). Точками самого множества не исчерпываются, вообще говоря, все его точки прикосновения: могут существовать точки прикосновения, и не принадлежащие ему. Например, точки $x = a$ и $x = b$ являются точками прикосновения интервала (a, b) и не содержатся в нем.

Замечание 1. Точка является точкой прикосновения данного множества тогда и только тогда, когда любая ее окрестность пересекается с этим множеством.

В самом деле, если x_0 — точка прикосновения множества X, то существует последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, в любой окрестности точки x_0 будут содержаться все члены этой последовательности, начиная с некоторого, и они являются точками множества X.

Наоборот, если в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X, то выберем по точке множества X в каждой окрестности $U(x_0, 1/n)$ и обозначим эти точки через x_n, т. е.

$$x_n \in X \cap U(x_0, 1/n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если $x_0 \in R$, т. е. x_0 является числом, то $x_n \in U(x_0, 1/n)$ означает, что $|x_n - x_0| < 1/n$. Отсюда при $n \to \infty$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Если же x_0 — бесконечно удаленная точка, например, $x_0 = \infty$, то $x_n \in U(\infty, 1/n)$ означает, что (см. п. 2.2) $|x_n| > \dfrac{1}{1/n} = n$. Отсюда при $n \to \infty$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Аналогично рассматриваются случаи $x_0 = +\infty$ и $x_0 = -\infty$. Таким образом, всегда из условия $x_n \in U(x_0, 1/n)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Отметим, что нижняя и верхняя грани множества (конечные или бесконечные) являются его точками прикосновения.

Поскольку понятие предела функции $f\colon X \to R$ в точке x_0 содержательно только тогда, когда эта точка является точкой прикосновения множества X, то в дальнейшем при рассмотрении предела функции f в точке x_0 будем всегда предполагать (как правило, специально это не оговаривая), что точка x_0 является точкой прикосновения множества X.

Примеры. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1},$$

определенную на множестве $X = R \setminus \{1\}$. Выясним, существует ли

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Пусть $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; тогда (п. 5.6)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{2\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1} = 1.$$

Таким образом, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, а так как он не зависит от выбора последовательности $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то существует и

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

Она определена на множестве $X = R \setminus \{0\}$ (рис. 58). Выясним, существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Возьмем две последовательности:

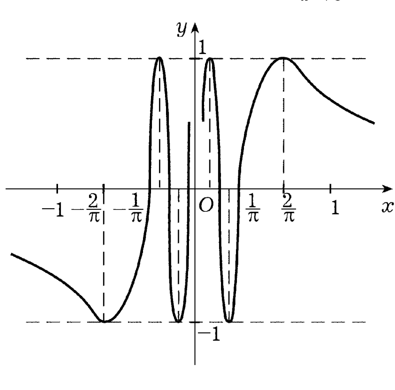


Рис. 58

$x_n = \dfrac{1}{\pi n}$ и $x'_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0,$$

$$x_n \in X, \quad x'_n \in X,$$

$$f(x_n) = \sin \pi n = 0,$$

$$f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1,$$

а это означает, что у рассматриваемой функции не существует предела в точке $x_0 = 0$.

Определение 3. Если задана функция $f(x)$, $x \in X$, $E \subset X$ и x_0 — точка прикосновения множества E, то *пределом функции* $f(x)$ *по множеству* E *в точке* x_0 называется предел ее сужения f_E (см. п. 1.2) в этой точке:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0} f_E(x). \tag{6.6}$$

Очевидно, что если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то для любого множества $E \subset X$, для которого точка x_0 является точкой прикосновения, существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)$, причем эти пределы равны.

Иногда при обозначении предела по множеству E вместо $x \in E$ будут употребляться для краткости другие обозначения, смысл ко-

торых будет ясен из контекста. Например, при $E = X \setminus \{x_0\}$ будем писать $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \neq x_0} f(x)$, а при $E = \{x_0\}$ будем писать $\lim\limits_{x \to x_0,\, x = x_0} f(x)$.

3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in Q, \\ 0, & \text{если} \quad x \in I. \end{cases}$$

Эта функция называется *функцией Дирихле**). Имеем

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in I}} f(x) = 0,$$

а предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ по всему множеству определения функции f, т. е. по всему множеству действительных чисел, не существует.

Часто пределы функций рассматриваются по пересечениям областей определения этих функций с так называемыми проколотыми окрестностями.

Определение 4. *Проколотой ε-окрестностью* $\overset{\circ}{U}(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 называется множество, получающееся удалением точки x_0 из ее ε-окрестности:

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} U(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}. \tag{6.7}$$

Проколотую окрестность будем также обозначать и через $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

Пример 4. Пусть

$$\operatorname{sign} x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тогда (рис. 59 и рис. 60) предел $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x|$ функции $|\operatorname{sign} x|$ по всей

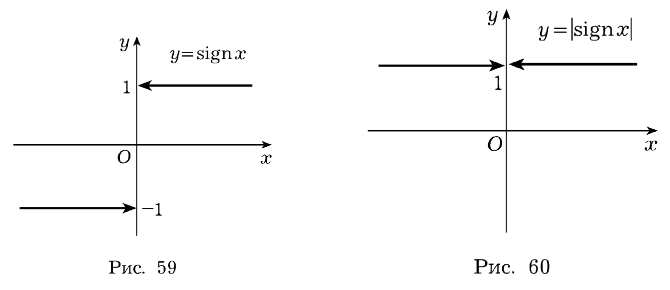


Рис. 59 Рис. 60

ее области задания, т. е. по всей числовой прямой (или, что равносильно, по любой окрестности $U(0)$ точки $x_0 = 0$), не существует, а предел этой функции по проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(0)$ точки $x_0 = 0$ существует и равен 1: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x)}} |\operatorname{sign} x| = 1$.

*) Л. Дирихле (1805–1859) — немецкий математик.

Действительно, для любой последовательности $x_n \in \overset{\circ}{U}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, имеем $f(x_n) = 1$, а поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Это означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in \overset{\circ}{U}(0)}} f(x) = 1$, т. е. что предел по проколотой окрестности существует и равен 1. Если же $x'_n = 1/n$, $x''_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 0$, и $f(x'_n) = 1$, $f(x''_n) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = 0$. Это означает, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in U(0)}} f(x)$ по всей окрестности $U(0)$ не существует.

Замечание 2. Пусть заданы последовательность $\{x_n\}$ и функция φ: $N \to N$. Введем обозначение $\varphi(k) = n_k$ и рассмотрим последовательность $\{x_{n_k}\}$. Иначе говоря, из значений последовательности $\{x_n\}$ образуем новую последовательность $\{x_{n_k}\}$, в которой порядок членов может не совпадать с их порядком в исходной последовательности. Таким образом, последовательность $\{x_{n_k}\}$ не является, вообще говоря, подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

$\triangleright$ Действительно, из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(a, \varepsilon)$, а из условия $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, — что для n_0 существует такой номер k_0, что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство $n_k > n_0$ и, следовательно, включение $x_{n_k} \in U(a, \varepsilon)$. Это и означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. $\triangleleft$

Из леммы 1 следует, что понятие предела последовательности является частным случаем понятия предела функции.

$\triangleright$ Действительно, пусть предел последовательности $\{x_n\}$ равен a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Рассмотрим функцию $f(n) = x_n$, $n \in N$. В силу леммы 1 для любой последовательности вида $\{x_{n_k}\}$, $n_k \in N$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} f(n_k) = a$. Согласно определению 1 это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$. $\triangleleft$

6.2. Определение непрерывности функции. При рассмотрении предела функции $f(x)$, $x \in X$, в точке x_0 случай, когда $x_0 \in X$, представляет особый интерес — он приводит к понятию непрерывной функции.

Если $x_0 \in X$ *и существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *то он равен* $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.8}$$

В самом деле, поскольку $x_0 \in X$, то в качестве последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, в этом случае можно взять стационарную последовательность $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ Для нее имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(x_0). \qquad (6.9)$$

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то, согласно его определению, для любой последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, существует предел последовательности $f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и все пределы таких последовательностей равны между собой. Поэтому из равенства (6.9) следует выполнение условия (6.8).

Определение 5. Если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

то функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0.

Согласно сказанному выше функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует предел (по множеству X) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $x_0 \in X$. Например, функция $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ является непрерывной в точке $x = 0$ (как и во всякой другой точке $x \neq 1$), ибо, как это было показано в п. 6.1,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 1 = f(0).$$

Функция же

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x = 0$, так как предел $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

6.3. Второе определение предела функции. Существует другое определение предела функций, в котором используется понятие окрестности, оно называется определением по Коши.

Определение 6. Точку a называют *пределом функции* $f(x)$, $x \in X$, при $x \to x_0$ (или, что то же самое, в точке x_0) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$f(X \cap U(x_0)) \subset U(a).$$

Используя логические символы, это определение можно записать в следующем виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a) \quad \exists U(x_0)\colon \quad f(X \cap U(x_0)) \subset U(a),$$

или, что равносильно,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a) \quad \exists U(x_0)\ \forall x\in X\cap U(x_0)\colon \quad f(x)\in U(a) \quad (6.10)$$

(в подобных символических записях двоеточие читается как "имеет место").

Вспоминая определения окрестностей, эти определения для соответствующих конкретных случаев можно перефразировать в терминах неравенств. Рассмотрим важный случай, когда x_0 и a — действительные числа.

Число a называется *пределом функции* $f(x)$, $x\in X$, *в точке* $x_0\in R$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, $x\in X$, выполняется неравенство

$$|f(x)-a|<\varepsilon.$$

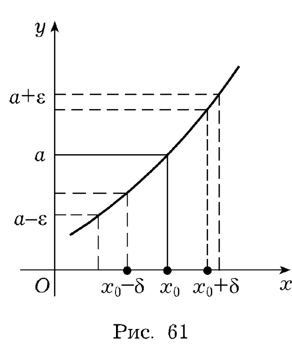


Рис. 61

Это определение действительно равносильно определению (6.10) в случае, если $x_0\in R$ и $a\in R$, так как условие $|x-x_0|<\delta$ равносильно условию

$$x\in U(x_0)=U(x_0,\delta),$$

а условие $|f(x)-a|<\varepsilon$ — условию

$$f(x)\in U(a)=U(a,\varepsilon)$$

(рис. 61).

В символической форме для рассматриваемого случая определение предела функции имеет вид

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in X,\ |x-x_0|<\delta\colon\ \ |f(x)-a|<\varepsilon.$$

В частности, если функция f непрерывна в точке $x_0\in X\subset R$ и $a=f(x_0)$ (в этом случае x_0 и a являются числами), то определение непрерывности в символической записи имеет вид

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in X,\ |x-x_0|<\delta\colon\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

В качестве примера бесконечных пределов рассмотрим определение предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in X,\ \ x>\frac{1}{\delta}\colon\ f(x)<-\frac{1}{\varepsilon}.$$

Теорема 1. *Определения* 1 *и* 6 *предела функции в точке прикосновения множества задания функции равносильны.*

▷ Пусть функция f задана на множестве X и x_0 — точка прикосновения этого множества. Предположим сначала, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ в

смысле определения 1, и покажем, что тогда число a является и пределом функции в смысле определения 6. Допустим, что это не так, т. е. (см. (6.10)), что существует такая окрестность $U(a)$, что для любой окрестности $U(x_0)$ найдется такая точка $x \in X \cap U(x_0)$, что $f(x) \notin U(a)$, или, в символической записи,

$$\exists U(a) \ \ \forall U(x_0) \ \ \exists x \in X \cap U(x_0)\colon \ f(x) \notin U(a). \tag{6.11}$$

В частности, указанные точки x найдутся в каждой окрестности $U(x_0, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$, точки x_0. Обозначим эти точки x_n, т. е.

$$x_n \in X \cap U(x_0, 1/n), \tag{6.12}$$

$$f(x_n) \notin U(a). \tag{6.13}$$

Из условия (6.12) следует (см. пример в п. 5.3), что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{6.14}$$

Поскольку $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения 1, то из выполнения условия (6.14) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Следовательно, для любой окрестности $U(a)$, в частности, и для окрестности $U(a)$, указанной в условии (6.13), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется включение

$$f(x_n) \in U(a), \tag{6.15}$$

что противоречит условию (6.13). В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения 6 предела функции $f\colon X \to R$, x_0 — точка прикосновения множества X и $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Зададим произвольно окрестность $U(a)$ точки a и выберем для нее окрестность $U(x_0)$ точки x_0, удовлетворяющую условию (6.10). Для окрестности $U(x_0)$ в силу условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(x_0)$, а так как $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то при $n > n_0$ будем иметь $x_n \in X \cap U(x_0)$. Следовательно, в силу (6.10) при $n > n_0$ имеет место включение $f(x_n) \in U(a)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ в смысле определения 1. ◁

6.4. Условие существования предела функции. Согласно определению предела функции (п. 6.1) для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ функции $f(x)$, $x \in X$, нужно, чтобы для любых последовательностей $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, существовали пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ и они были равны между собой. Покажем, что второе условие вытекает из первого. То есть, не предполагая равенство этих

пределов, а предполагая только их существование, можно доказать их равенство, а следовательно, и существование предела функции. Точнее, докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in X$, имела конечный или определенного знака бесконечный предел в точке x_0, являющейся конечной или бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ имела предел (конечный или определенного знака бесконечный).*

$\triangleright$ Необходимость сформулированного условия для существования $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ содержится в самом определении предела функции (см. (6.4)), в котором утверждается существование пределов $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ для всех указанных в условиях леммы последовательностей $\{x_n\}$.

Докажем достаточность этого условия для существования предела функции. Пусть $x'_n \to x_0$, $x''_n \to x_0$, $x'_n \in X$, $x''_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и существуют пределы $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) \in \overline{R}$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x''_n) \in \overline{R}$. Покажем, что они равны. Положим

$$x_n = \begin{cases} x'_k, & \text{если} \quad n = 2k-1, \\ x''_k, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ и $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно условиям леммы существуют пределы

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n), \quad \lim_{n \to \infty} f(x''_n), \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n),$$

причем $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(x_n)\}$.

Поскольку из существования у последовательности предела (конечного или бесконечного) следует существование того же предела у любой ее подпоследовательности, то будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x''_n).$$

Таким образом, пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$, где $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, не зависят от выбора указанных последовательностей $\{x_n\}$. Обозначив общее значение пределов последовательностей $\{f(x_n)\}$ через a, получим $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. $\triangleleft$

6.5. Предел функции по объединению множеств.

Лемма 3. *Пусть функция f задана на объединении $X_1 \cup X_2$ множеств X_1 и X_2, а x_0 является точкой их прикосновения. Тогда если при $x \to x_0$ функция f имеет равные пределы по множествам X_1*

и X_2, то она имеет тот же предел и по их объединению.

$\triangleright$ Если
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_2}} f(x)=a,$$
то для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что образы ее пересечений $X_1\cap U(x_0)$ и $X_2\cap U(x_0)$ с множествами X_1 и X_2 содержатся в окрестности $U(a)$, а тогда и образ их объединения $(X_1\cup X_2)\cap U(x_0)$ также содержится в $U(a)$. Это и означает, что
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_1\cup X_2}} f(x)=a. \triangleleft$$

6.6. Односторонние пределы и односторонняя непрерывность. Введем обозначения: для любого числового множества X и любой точки x_0 расширенной числовой прямой $\overline{R}$ положим
$$X_+(x_0)\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in X:\ x\geqslant x_0\},\quad X_-(x_0)\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in X:\ x\leqslant x_0\}.$$
Если $x_0\in X$, то $x_0\in X_+$, $x_0\in X_-$, а если $x_0\notin X$, то $x_0\notin X_+$, $x_0\notin X_-$. Очевидно, если $x_0=+\infty$, то $X_+(x_0)=\varnothing$, а если $x_0=-\infty$, то $X_-(x_0)=\varnothing$.

В случае когда множество $X_+(x_0)$ (соответственно множество $X_-(x_0)$) непусто, условие, что x_0 является его точкой прикосновения, равносильно тому, что $x_0=\inf X_+(x_0)$ (соответственно $x_0=\sup X_-(x_0)$).

Определение 7. Пусть задана функция $f(x)$, $x\in X$ и $x_0\in\overline{R}$. Точка a называется *пределом функции f слева* при $x\to x_0$ (соответственно *справа*), если она является пределом при $x\to x_0$ функции f по множеству $X_-(x_0)$ (соответственно по множеству $X_+(x_0)$), т. е. если
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_-(x_0)}} f(x)=a\quad\text{(соответственно}\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X_+(x_0)}} f(x)=a).$$

В силу этого определения предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ причисляется к пределам слева, а $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ — к пределам справа.

Иначе говоря, предел функции f слева в точке x_0 — это предел в этой точке сужения функции f на множество $X_+(x_0)$, а предел справа — это предел сужения f на множество $X_-(x_0)$.

Для пределов справа и слева сужения функции f на множество $X\setminus\{x_0\}$, т. е. для случая, когда предел берется по множеству, не содержащему точку x_0, имеются специальные обозначения: для предела слева $f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, а для предела справа $f(x_0+0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. При этом в случае $x_0=0$ вместо $0+0$ и $0-0$ пишут $+0$

и -0, а в случае $x_0 = +\infty$ (соответственно $x_0 = -\infty$) вместо $+\infty - 0$ $(-\infty + 0)$ пишут просто $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Если множества $X_-(x_0) \setminus \{x_0\}$, $X_+(x_0) \setminus \{x_0\}$ не пусты, x_0 является их точкой прикосновения и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по множеству X, то он называется также *двусторонним пределом.*

Пример 1. Для функции $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 59) имеем

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ задана на множестве X, $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$, $X_-(x_0) \neq \varnothing$, $X_+(x_0) \neq \varnothing$, то для того, чтобы у функции f существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовали пределы слева и справа и они были равны (общее значение этих пределов является двусторонним пределом функции f в точке x_0).*

$\triangleright$ Если у функции f существует предел в точке x_0, то тот же предел существует у этой функции при $x \to x_0$ и по любому подмножеству $E \subset X$, для которого точка x_0 является его точкой прикосновения, в частности по множествам $X_-(x_0)$ и $X_+(x_0)$. Обратно, если у функции f существуют равные пределы по множествам $X_-(x_0)$ и $X_+(x_0)$, то по лемме 3 у нее существует тот же предел и по их объединению, т. е. по множеству $X = X_-(x_0) \cup X_+(x_0)$. $\triangleleft$

Определение 8. Функция $f(x)$, $x \in X$, называется *непрерывной слева* (*справа*) в точке $x_0 \in X$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = f(x_0) \quad \text{(соответственно} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = f(x_0)).$$

Из теоремы 2 следует, что если функция f непрерывна слева и справа в точке x_0, то она непрерывна в этой точке (напомним, что непрерывность функции f в точке x_0 означает, что в x_0 существует предел функции f по множеству, содержащему эту точку: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. в данном случае $x_0 \in X_+(x_0)$ и $x_0 \in X_-(x_0)$ и, следовательно, $x_0 \in X$).

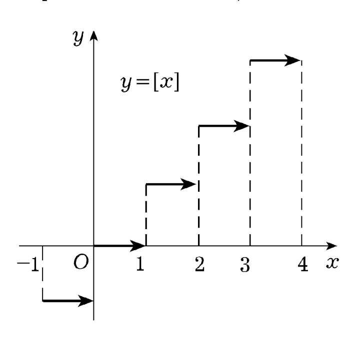


Рис. 62

Пример 2. Символом $[x]$ обозначается целая часть числа $x \in R$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x (рис. 62). Таким образом, $[x] = n \in Z$, $n \leqslant x$, но $n + 1 > x$. Функция $y = [x]$ непрерывна справа во всех точках числовой оси и не является непрерывной слева во всех целочисленных точках $x = \pm n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

6.7. Свойства пределов функций. В пп. 6.7–6.12 все рассматриваемые функции определены на некотором фиксированном множестве $X \subset R$ и x_0 — его точка прикосновения, конечная или бесконечно удаленная.

Функция называется *ограниченной* (сверху или снизу), если множество ее значений ограничено (соответственно сверху или снизу).

1°. *Если функция f имеет в точке x_0 конечный предел, то существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что функция f ограничена на пересечении $X \cap U(x_0)$.*

$\triangleright$ Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in R$, то существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in \in U(a, 1)$ (здесь в качестве окрестности $U(a)$ в определении 6 взята окрестность $U(a,1)$), т. е. неравенство $a - 1 < f(x) < a + 1$. $\triangleleft$

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке x_0, то существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что функция f ограничена на*

$$X \cap U(x_0).$$

Это следует из того, что если функция f непрерывна в точке x_0, то она имеет в этой точке конечный предел.

2° (лемма о сохранении знака). *Если функция f имеет в точке x_0 не равный нулю конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$, то существуют такие окрестность $U(x_0)$ точки x_0 и число $c > 0$, что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} f(x) > c, \quad &\textit{если} \quad a > 0; \\ f(x) < -c, \quad &\textit{если} \quad a < 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

$\triangleright$ Поскольку $a \neq 0$, то $\frac{|a|}{2} > 0$. Возьмем в качестве окрестности $U(a)$ в определении 6 окрестность $U\left(a, \frac{|a|}{2}\right)$. Тогда согласно этому определению существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in U\left(a, \frac{|a|}{2}\right)$, т. е. справедливо неравенство

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}.$$

Отсюда имеем при $a > 0$

$$f(x) > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} > 0,$$

а при $a < 0$

$$f(x) < a + \frac{|a|}{2} = -|a| + \frac{|a|}{2} = -\frac{|a|}{2} < 0.$$

Таким образом, неравенства (6.16) выполняются при $c = \frac{|a|}{2}$. $\triangleleft$

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существуют такие окрестность $U(x_0)$ точки x_0 и постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняются неравенства:*

$$f(x) > c, \quad \text{если} \quad f(x_0) > 0;$$
$$f(x) < -c, \quad \text{если} \quad f(x_0) < 0.$$

Это сразу вытекает из свойства $2°$, поскольку непрерывность в точке x_0 означает существование у функции f в точке x_0 конечного предела, равного $f(x_0)$. В качестве c можно взять $\frac{|f(x_0)|}{2}$.

Замечание. Если у функции f в точке x_0 существует один из бесконечных пределов ∞, $+\infty$ и $-\infty$, то для любого числа $c > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой точки $x \in X \cap U(x_0)$ выполняются неравенства:

$$|f(x)| > c, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty;$$
$$f(x) > c, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty;$$
$$f(x) < -c, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Это следует из определения 5 предела функции, в котором в качестве окрестности $U(a)$ бесконечно удаленной точки в этом случае следует взять окрестность $U\left(a, \frac{1}{c}\right)$.

$3°$. *Если $f(x) = c$ — постоянная, $x \in X$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.*

Это означает, в частности, что постоянная функция является непрерывной.

$4°$. *Если $f(x) \geqslant a$, $x \in X$ и существует конечный или определенного знака бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant a$.*

$5°$. *Если $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in X$ и существуют конечные или определенного знака бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x)$ и они равны между собой, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \psi(x).$$

$6°$. *Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существуют и конечные пределы*

$$\lim_{x\to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) + \mu \lim_{x\to x_0} g(x), \quad \lambda \in R, \quad \mu \in R, \tag{6.17}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x), \tag{6.18}$$

а если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}. \tag{6.19}$$

В последнем случае функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только для тех x, для которых $g(x) \neq 0$ (см. свойство 2°).

▷ Утверждения 3°–6° следуют из соответствующих утверждений для пределов последовательностей (см. пп. 5.3, 5.6) Докажем, например, формулу (6.18). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in R$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in R$. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющую своим пределом x_0. Тогда согласно определению 1 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, поэтому в силу свойства пределов последовательностей (свойство 3° в п. 5.6)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \lim_{n\to\infty} g(x_n) = ab,$$

и поскольку последовательность $\{x_n\}$ является произвольной последовательностью такой, что $x_n \to x_0$ и $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то согласно тому же определению 1 предела функции получим

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x). \ \triangleleft$$

Следствие. *Если функции f и g непрерывны в точке $x_0 \in X$, то функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $\lambda \in R$, $\mu \in R$, $f(x)g(x)$, а если $g(x_0) \neq 0$, то и $\frac{f(x)}{g(x)}$, непрерывны в точке x_0.*

▷ Докажем, например, непрерывность произведения $f(x)g(x)$. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то в этой точке они имеют конечные пределы $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Поэтому согласно формуле (6.18) получим

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0).$$

Это и означает непрерывность произведения $f\,g$. ◁

Отметим, что проведенное доказательство можно было бы и не проводить, так как непрерывность функции в точке означает, что (см. п. 6.2) эта точка принадлежит множеству задания функции и что у функции в этой точке существует предел по указанному множеству. Поскольку функции f и g заданы в точке x_0, то, очевидно, и функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $f(x)g(x)$, а при $g(x_0) \neq 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$, заданы в этой точке. В силу свойства 6° у перечисленных функций существуют пределы в точке x_0, принадлежащей в данном случае их множеству задания, что и означает их непрерывность в точке x_0. Иначе говоря, утверждение следствия является просто частным случаем утверждения 6°, когда точка, в которой рассматривается предел, принадлежит области определения функций.

6.8. Бесконечно малые.

Определение 9. Функция $\alpha(x)$, $x \in X$, называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые функции играют в теории пределов функций роль, аналогичную той, которую играют бесконечно малые последовательности в теории пределов последовательностей (п. 5.5).

Лемма 3. *Для того чтобы у функции $f(x)$, $x \in X$, существовал в точке x_0 конечный предел, равный a, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - a$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.*

$\triangleright$ Действительно, существование конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ равносильно тому, что (см. п. 6.4) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, т. е. $|\alpha(x)| < \varepsilon$, что и означает бесконечную малость функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$. $\triangleleft$

Теорема 3. *Линейная комбинация конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.*

Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную функцию является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.*

$\triangleright$ Первое утверждение теоремы сразу следует из свойства предела линейной комбинации функций (см. (6.17)). Докажем второе: пусть

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \tag{6.20}$$

а функция f ограничена на множестве X, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c. \tag{6.21}$$

Тогда для произвольной последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность $\{\alpha(x_n)\}$ будет в силу условия (6.20) бесконечно малой, а последовательность $\{f(x_n)\}$ в силу условия (6.21) — ограниченной. Поэтому (см. п. 5.5) их произведение является бесконечно малой последовательностью, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)\alpha(x_n) = 0$. Поскольку $\{x_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0.$$

Для доказательства следствия из теоремы достаточно заметить, что всякая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, имея в точке x_0 конечный предел, ограничена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 произведение конечного числа

бесконечно малых при $x \to x_0$ функций можно рассматривать как произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную. ◁

6.9. Непрерывные функции. Согласно определению (определение 5, п. 6.2) функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in R$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.22}$$

Это означает (определение 1, п. 6.1), что если $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, то $f(x_n) \to f(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, а также (см. определение 6 и теорему 1 в п. 6.4), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Из (6.22) следует, что

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{6.23}$$

Введем обозначения:

$$\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0, \quad \Delta y \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Тогда равенство (6.23) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{6.24}$$

С точки зрения приближенного вычисления значений функций выполнение равенства (6.22), т. е. непрерывность функции, означает, что по достаточно точным приближеным значениям аргумента можно вычислять сколь угодно точно значения функции.

В качестве примера использования записи условия непрерывности в виде (6.24) покажем, что функция $f(x) = 1/x$ (рис. 63) непрерывна во всех точках $x_0 \neq 0$. Имеем

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$
$$= \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} \to 0$$

при $\Delta x \to 0$.

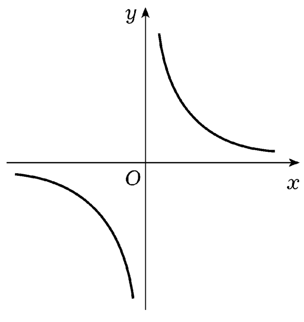


Рис. 63

Бывает полезным условие непрерывности функции в точке, основанное на рассмотрении предела функции по проколотой окрестности этой точки (см. определение 4 в п. 6.1).

Лемма 5. *Если функция f задана на множестве X, $x_0 \in X$ и существует предел*

$$\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} f(x) = a, \tag{6.25}$$

то функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$a = f(x_0).$$

▷ Если функция f непрерывна в точке x_0, т. е. выполняется условие (6.22), то

$$\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(предел по подмножеству совпадает с пределом по множеству, если последний существует). Таким образом, предел (6.25) равен $f(x_0)$.

Пусть, наоборот, выполняется условие $a = f(x_0)$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x) \underset{(6.25)}{=} f(x_0), \tag{6.26}$$

очевидно, и

$$\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0).$$

Таким образом, по двум множествам $X \setminus \{x_0\}$ и $\{x_0\}$ функция f при $x \to x_0$ имеет один и тот же предел $f(x_0)$. Поэтому она согласно лемме 3 из п. 6.5 имеет тот же предел и по их объединению

$$(X \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\} = x,$$

т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это означает, что из выполнения условия $a = f(x_0)$ следует выполнение условия (6.22), т. е. того, что функция f непрерывна в точке x_0. ◁

Условие непрерывности леммы 5 бывает полезно, в частности, в случае односторонних пределов, когда пределы слева и справа берутся по множествам, не содержащим точки x_0, т. е. когда рассматриваются пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. Именно, имеет место следующее утверждение.

Если $x_0 \in X$ *и*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0), \tag{6.27}$$

то функция f *непрерывна в точке* x_0.

▷ Действительно, из условия (6.27) следует, что $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x) = f(x_0)$, а поэтому согласно лемме 5 функция f непрерывна в точке x_0. ◁

Для дальнейшего анализа свойства непрерывности функции введем понятия изолированных и предельных точек множества.

Определение 10. Точка x_0 называется *изолированной точкой множества* $X \subset R$, если существует окрестность $U(x_0)$, пересечение которой с множеством X состоит только из самой точки x_0:

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\}.$$

Определение 11. Точка x_0 называется *предельной точкой множества* $X \in R$, если в любой ее окрестности содержится точка множества X, отличная от самой точки x_0.

Например, все точки множества натуральных чисел N изолированы, а множество Q всех рациональных чисел вовсе не имеет изолированных точек. Каждая точка числовой прямой R является предельной точкой для множеств Q, I и R.

Предельная точка множества может как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему. Так, например, концы a и b отрезка $[a, b]$ и интервала (a, b) являются предельными точками и того, и другого промежутка, но в первом случае они принадлежат ему, а во втором — нет.

Каждая точка прикосновения множества X является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой. В самом деле, либо у нее существует окрестность, не содержащая других точек множества, кроме нее самой, тогда она изолированная, либо в любой ее окрестности имеются точки множества X, отличные от нее, тогда она предельная.

Лемма 6. *Всякая функция непрерывна в каждой изолированной точке множества своего определения.*

▷ Пусть на множестве X задана функция f и x_0 — изолированная точка множества X. Тогда существует такая окрестность $U(x_0)$ точки, что

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\}.$$

Какова бы ни была последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется условие $x_n \in U(x_0)$, и так как $x_n \in X$, то при $n > n_0$ имеет место равенство $x_n = x_0$, а следовательно, и $f(x_n) = f(x_0)$ (т. е., начиная с номера $n_0 + 1$, последовательность $\{f(x_n)\}$ делается стационарной), а потому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. В силу произвольного выбора последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, это означает, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \ \triangleleft$$

Например, функции, определенные лишь на одной точке или на двух точках, или, более общо, на любом конечном множестве точек, являются непрерывными. Непрерывной является и элементарная функция

$$y = 1 + \sqrt{\lg\cos 2\pi x},$$

определенная только для целочисленных значений аргумента, т. е. для $x = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, в которых она равна 1 (в остальных точках выражение под знаком корня отрицательно, и поэтому функция не определена). График этой функции состоит из отдельных изолированных

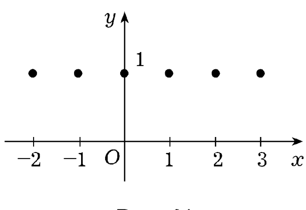


Рис. 64

точек (0; 1), (1; 1), (−1; 1), (2; 1), (−2; 1), ... (рис. 64).

Таким образом, при изучении вопроса о непрерывности функции в некоторой точке следует рассматривать лишь предельные точки ее множества определения, так как, согласно доказанному, во всех изолированных точках этого множества она заведомо непрерывна.

В этом смысле дискретное в математике является частным случаем непрерывного.

6.10. Классификация точек разрыва.

Определение 12. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Тогда x_0 называется *точкой разрыва функции* f, либо если функция f не определена в самой точке x_0, либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

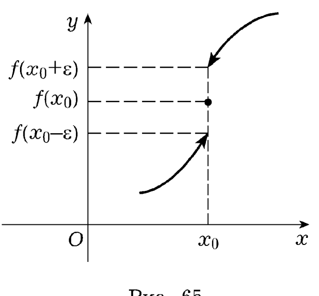
Образно говоря, точка x_0 является точкой разрыва функции, если x_0 является значением аргумента, при котором происходит "разрыв графика функции".

Например, точка $x = 0$ является точкой разрыва функции $f(x) = 1/x$, так как эта функция не определена при $x = 0$. Та же точка $x = 0$ является и точкой разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

так как в этом случае, хотя функция f и определена при $x = 0$, но она не непрерывна при $x = 0$.

Если в точке разрыва существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, то она называется *точкой разрыва первого рода*, а величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — *скачком функции* f в точке x_0 (рис. 65).



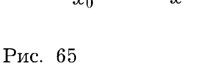


Рис. 65

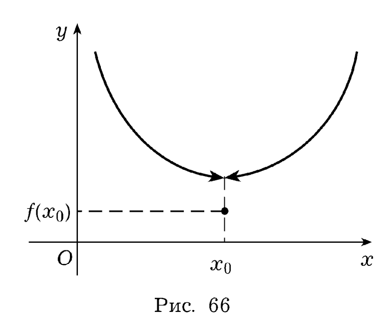


Рис. 66

Если скачок функции в точке x_0 равен нулю, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* (рис. 66).

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода.*

Примеры. 1. У функции

$$f(x) = \operatorname{sign} x$$

(см. рис. 59) точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода, и скачок в ней равен 2:

$$\operatorname{sign}(+0) - \operatorname{sign}(-0) = 2.$$

Та же точка $x_0 = 0$ является для функции $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (см. рис. 60) точкой устранимого разрыва:

$$|\operatorname{sign}(+0)| - |\operatorname{sign}(-0)| = 0.$$

2. Точка $x_0 = 0$ для функций $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ является точкой разрыва второго рода.

6.11. Пределы монотонных функций.

Определение 13. Функцию $f(x)$, $x \in X$, называют *возрастающей* (соответственно *убывающей*) на множестве X и пишут $f \uparrow$ (соответственно $f \downarrow$), если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными.*

Если из неравенства $x_1 < x_2$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, что $f(x_1) > f(x_2)$), то функцию f называют *строго возрастающей* (*строго убывающей*) и пишут $f \uparrow\uparrow$ (соответственно $f \downarrow\downarrow$). Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными.* Если функция f (строго) возрастает на множестве X, то функция $-f$ (строго) убывает на этом множестве.

Верхней гранью $\sup f$ *функции* $f(x)$, $x \in X$ (или, в другой записи, $\sup\limits_{x\in X} f(x)$), называется верхняя грань значений этой функции на множестве ее задания X:

$$\sup f \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in X}\{f(x)\},$$

а *нижней гранью* $\inf f$ (или $\inf\limits_{x\in X} f(x)$) — нижняя грань ее значений:

$$\inf f = \inf_{x\in X}\{f(x)\}.$$

Если функция f принимает в точке x_0 наибольшее значение на множестве X, то, очевидно, $f(x_0) = \sup f$, а если она принимает в точке x_0 наименьшее значение, то $f(x_0) = \inf f$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$, $x \in X$, возрастает на множестве X, $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$, $\alpha \notin X$, $\beta \notin X$. Тогда у функции f*

существуют конечные или определенного знака бесконечные пределы справа в точке $x = \alpha$:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \inf_{x \in X} f(x), \tag{6.28}$$

и слева в точке $x = \beta$:

$$\lim_{x \to \beta} f(x) = \sup_{x \in X} f(x). \tag{6.29}$$

Таким образом, если функция f ограничена снизу (т. е. ограничено снизу множество ее значений), то предел (6.28) будет конечным, а если f не ограничена снизу, то этот предел будет бесконечным, равным $-\infty$. Аналогично, предел (6.29) будет конечным или бесконечным, равным $+\infty$, когда функция f ограничена сверху или соответственно не ограничена сверху.

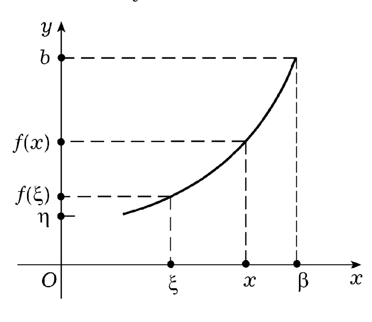


Рис. 67

▷ Пусть функция f возрастает на множестве X и

$$b = \sup_{x \in X} f(x) \leqslant +\infty. \tag{6.30}$$

Зададим произвольно окрестность $U(b)$ точки b, и пусть η — левый конец этой окрестности (рис. 67); тогда $\eta < b$ и существует такое $\xi \in \in X$, что

$$f(\xi) > \eta. \tag{6.31}$$

Из того, что $\beta = \sup X$, следует, что $\xi \leqslant \beta$, но $\xi \in X$, а по условиям теоремы $\beta \notin X$, поэтому $\xi < \beta$.

Обозначим через $U(\beta)$ окрестность точки β, левым концом которой является точка ξ (см. рис. 67). Тогда если

$$x \in X \cap U(\beta), \tag{6.32}$$

то $\xi < x < \beta$ и, следовательно, в силу возрастания функции f будет выполняться неравенство

$$f(\xi) \leqslant f(x). \tag{6.33}$$

Поэтому

$$\eta \underset{\substack{(6.31)\\(6.33)}}{<} f(x) \leqslant \sup_{x \in X} f(x) \underset{(6.30)}{=} b. \tag{6.34}$$

Вспоминая, что точка η является левым концом окрестности $U(b)$, получим из (6.34)

$$f(x) \in U(b). \tag{6.35}$$

Выполнение условий (6.32) и (6.35) означает, что

$$\lim_{x \to \beta} f(x) = b.$$

Аналогично рассматривается случай предела функции f при $x \to \alpha$. ◁

Следствие. *Если функция f возрастает на множестве X, $x_0 \notin X$, множества $X_-(x_0)$, $X_+(x_0)$ не пусты и точка x_0 является их точкой прикосновения, то функция f имеет в этой точке конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, причем*

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0+0). \tag{6.36}$$

Напомним, что запись $x \to x_0+0$ (соответственно запись $x \to x_0-0$) означает, что рассматривается предел справа (слева) по множеству, не содержащему точки x_0.

$\triangleright$ Если функция f возрастает на множестве X, то для любых $x' \in X_-(x_0)$ и $x'' \in X_+(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x') \leqslant f(x''). \tag{6.37}$$

Иначе говоря, возрастающая функция f ограничена числом $f(x'')$ сверху на множестве $X_-(x_0)$ и числом $f(x')$ снизу на множестве $X_+(x_0)$. Поэтому согласно теореме 4 существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$. Перейдя к верхней грани в левой части неравенства (6.37), получим

$$\sup_{x<x_0} f(x) \leqslant f(x''),$$

а перейдя здесь в правой части к нижней грани, будем иметь

$$\sup_{x<x_0} f(x) \leqslant \inf_{x>x_0} f(x). \tag{6.38}$$

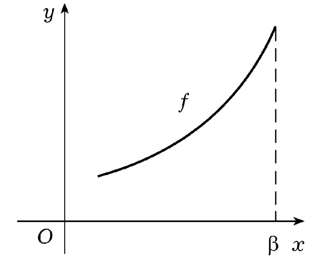
Согласно теореме 4

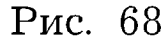
$$f(x_0-0) = \sup_{x<x_0} f(x), \quad f(x_0+0) = \inf_{x>x_0} f(x), \quad x \in X.$$

Поэтому неравенство (6.38) совпадает с неравенством (6.36). $\triangleleft$

Замечание 1. Теорема, аналогичная теореме 4, справедлива и для убывающих функций.

Замечание 2. Если функция f возрастает на множестве X, $\beta = \sup X$ и $\beta \in X$, то предел $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$ функции f по всякому X (т. е. включая β) может существовать (рис. 68), тогда функция f будет




Рис. 68

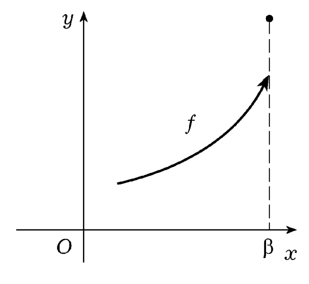


Рис. 69

непрерывна в точке $x = \beta$ (см. п. 6.2), а может и не существовать (рис. 69), тогда точка β будет точкой разрыва функции f. Подчеркнем, однако, что согласно теореме 4 предел $\lim\limits_{x\to\beta-0} f(x)$ всегда существует.

6.12. Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы функция* $f(x)$, $x \in X$, *имела в (конечной или бесконечно удаленной) точке* x_0 *конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовала такая окрестность* $U(x_0)$ *точки* x_0, *что для любых* $x' \in X \cap U(x_0)$ *и* $x'' \in X \cap U(x_0)$ *выполнялось бы неравенство*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{6.39}$$

$\triangleright$ Докажем необходимость условия (6.39). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in R$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для каждого $x \in X \cap U(x_0)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon/2.$$

Поэтому если $x' \in X \cap U(x_0)$ и $x'' \in X \cap U(x_0)$, то

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - a] + [a - f(x')]| \leqslant \\ \leqslant |f(x'') - a| + |a - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность условий (6.39) для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Пусть произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$; тогда существует такая окрестность $U(x_0)$, что для всех $x' \in X \cap U(x_0)$ и всех $x'' \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ В силу определения предела последовательности существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ имеет место включение $x_n \in U(x_0)$, а поскольку $x_n \in X$, то и включение $x_n \in X \cap U(x_0)$. Тогда для всех номеров $n > n_0$ и $m > n_0$ будем иметь $x_n \in X \cap U(x_0)$, $x_m \in X \cap U(x_0)$, и, следовательно, будет выполняться неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию сходимости Коши для последовательностей и, следовательно, имеет конечный предел.

Таким образом, для любой последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет конечный предел. Отсюда в силу леммы п. 6.3 сразу следует, что функция f имеет в точке x_0 конечный предел. $\triangleleft$

Замечание. Сформулируем критерий Коши существования конечного предела функции в терминах неравенств для случая, когда x_0 — действительное число:

функция $f(x)$, $x \in X$, имеет в точке $x_0 \in R$ конечный предел тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x' \in X$, $x'' \in X$, $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

6.13. Предел и непрерывность композиции функций.

Теорема 6. *Пусть функция f задана на множестве X, функция g — на множестве Y и $f(X) \subset Y$. Если существуют конечные или бесконечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \tag{6.40}$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0, \tag{6.41}$$

то при $x \to x_0$ существует предел (конечный или бесконечный) сложной функции $g[f(x)]$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y). \tag{6.42}$$

$\triangleright$ Пусть $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$; тогда в силу (6.40) имеем

$$y_n \overset{\text{def}}{=} f(x_n) \to y_0, \quad y_n \in Y, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому в силу (6.41) $g(y_n) \to z_0$, но $y_n = f(x_n)$, следовательно, $g[f(x_n)] \to z_0$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. имеет место равенство (6.42). $\triangleleft$

Замечание 1. Если функция g непрерывна в точке y_0, т. е.

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0), \tag{6.43}$$

то формулу (6.42) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g\Big(\lim_{x \to x_0} f(x)\Big). \tag{6.44}$$

Иначе говоря, предельный переход перестановочен с операцией взятия непрерывной функции. В самом деле, согласно теореме 6

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] \underset{(6.42)}{=} \lim_{y \to y_0} g(y) \underset{(6.43)}{=} g(y_0) \underset{(6.40)}{=} g\Big(\lim_{x \to x_0} f(x)\Big).$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывная функция от непрерывной функции непрерывна, точнее:

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то и их композиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.*

$\triangleright$ Действительно, непрерывность функции f в точке x_0 означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0, \tag{6.45}$$

поэтому в силу непрерывности функции g в точке y_0 из формулы (6.44) получим

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] \underset{(6.44)}{=} g\Big[\lim_{x \to x_0} f(x)\Big] \underset{(6.45)}{=} g(f(x_0)),$$

т.е. функция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0. ◁

Замечание 2. Обычно, когда говорят, что некоторая функция в данной точке имеет предел, то имеют в виду, что этот предел конечный, а случай бесконечного предела оговаривают особо.

6.14. Предел и непрерывность функций комплексного аргумента. Понятия предела и непрерывности функции обобщаются на случай функций, значениями которых являются комплексные числа и которые заданы на подмножествах множества комплексных чисел.

К таким функциям относятся, например, функции $f(z) = |z|$, $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = z^2$, $f(z) = 1/z$. Первые три определены на всей комплексной плоскости C, а последняя — на комплексной плоскости, из которой удалена точка 0; первая принимает только неотрицательные действительные значения, три последние — существенно комплексные.

Итак, будем здесь предполагать, что функция f задана на некотором подмножестве Z множества комплексных чисел C и принимает комплексные значения, т. е. что

$$f(z) \in C, \quad z \in Z \subset C.$$

Комплексное число w_0 называется пределом функции f в точке z_0 (или, что то же самое, при $z \to z_0$), если для любой последовательности комплексных чисел $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ (см. п. 5.11), имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$.

В терминах окрестностей точек на комплексной плоскости (п. 5.11) это определение равносильно следующему.

Комплексное число w_0 называется *пределом функции f в точке* z_0, если для любой окрестности V точки w_0 существует такая окрестность U точки z_0, что

$$f(U \cap Z) \subset V.$$

На "языке ε–δ" это означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z \in Z$, для которых $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Доказательство эквивалентности двух сформулированных определений предела функции комплексного переменного — в терминах последовательностей и в терминах окрестностей — проводится аналогично случаю функций действительного аргумента, принимающих действительные значения.

При рассмотрении предела функции f в точке z_0 возможны два случая: z_0 принадлежит множеству Z, на котором задана функция f,

или не принадлежит ему. Если $z_0 \in Z$, то существование предела функции f в точке z_0 означает, что

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

В этом случае функция f называется *непрерывной в точке* z_0.

Если $f(z) = u(z) + v(z)i$, $w_0 = u_0 + v_0 i$, $u(z), v(z), u_0, v_0 \in R$, то существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ равносильно, как это легко видеть, существованию пределов $\lim\limits_{z \to z_0} u(z) = u_0$ и $\lim\limits_{z \to z_0} v(z) = v_0$, причем в случае существования указанных пределов имеет место равенство

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} u(z) + \lim_{z \to z_0} v(z)i.$$

В частности, функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны функции $u(z)$ и $v(z)$.

Заметим, что функции $u(z)$ и $v(z)$ принимают действительные значения, но их аргументы — комплексные числа, поэтому пределы этих функций и их непрерывность понимаются в смысле сделанных выше определений для функций комплексного переменного.

На комплекснозначные функции комплексного аргумента переносятся многие свойства предела функций, доказанные выше в этом параграфе для действительных функций действительного аргумента. Например, предел линейной комбинации функций, имеющих пределы в некоторой точке, равен такой же линейной комбинации этих пределов.

Функция $f(z)$ называется *ограниченной на множестве* $Z \subset C$, если на этом множестве ограничена ее абсолютная величина $|f(z)|$.

Как и раньше, справедливо утверждение: *если функция f имеет предел при $z \to z_0$, то она ограничена в некоторой окрестности точки z_0*.

Переносятся на случай функций комплексного аргумента понятие предела при стремлении аргумента к бесконечности и понятие бесконечного предела. Ограничимся формулировкой общего понятия предела (конечного и бесконечного) лишь в терминах последовательностей.

Бесконечность ∞ называется *бесконечно удаленной точкой комплексной плоскости C*, в связи с чем точки самой комплексной плоскости C называются также и *конечными точками.*

Конечная или бесконечно удаленная точка w_0 комплексной плоскости C называется *пределом функции f при $z \to z_0$*, где z_0 — также конечная или бесконечно удаленная точка, если для любой последовательности $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, имеет место $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$.

Это определение предела (как и все сформулированные выше) содержательно, конечно, лишь в том случае, когда существует такая

последовательность $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. В этом случае точка z_0 называется соответственно *конечной* или *бесконечно удаленной точкой прикосновения множества* Z.

§ 7. Свойства непрерывных функций

7.1. Ограниченность непрерывных функций. Достижимость экстремальных значений.

Определение 1. Функция называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой его точке.

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней и своей нижней граней.*

Иначе говоря, непрерывная на отрезке функция принимает как свое наибольшее, так и свое наименьшее значение (см. п. 3.1).

▷ Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\beta = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Покажем, что $\beta < +\infty$ и что существует такое $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = \beta$. Пусть $\{y_n\}$ — такая последовательность, что

$$y_n \to \beta, \quad y_n < \beta, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.1}$$

Согласно определению верхней грани для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдется такое $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > y_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.2}$$

С другой стороны, поскольку β — верхняя грань функции f, то для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant \beta$, в частности $f(x_n) \leqslant \beta$. Итак, $y_n < f(x_n) \leqslant \beta$, $n = 1, 2, \ldots$, а поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{(7.1)}{=} \beta. \tag{7.3}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим ее предел через x_0:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0. \tag{7.4}$$

Поскольку $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, то

$$a \leqslant x_0 \leqslant b. \tag{7.5}$$

А так как $\{f(x_{n_k})\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f(x_n)\}$, то из (7.3) имеем

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \beta. \tag{7.6}$$

Но функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, в частности, в точке x_0, поэтому из (7.4) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{7.7}$$

Следовательно, $\beta \underset{\substack{(7.6)\\(7.7)}}{=} f(x_0) < +\infty$.

Аналогично доказывается ограниченность снизу функции f и достижимость ее нижней грани. ◁

7.2. Промежуточные значения непрерывных функций.
Теорема 2 (Больцано–Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$f(\xi) = C. \tag{7.8}$$

Следствие 1. *Функция, непрерывная на конечном или бесконечном промежутке (отрезке, интервале, полуинтервале), принимая два каких-либо значения, принимает и все промежуточные.*

▷ Пусть для определенности $f(a) = A < B = f(b)$ и, следовательно, $A < C < B$. Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = C$, то точка ξ найдена (см. (7.8)): $\xi = \frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq C$, то либо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < C$, либо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > C$. В первом случае выберем отрезок $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, а во втором — отрезок $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$; выбранный отрезок обозначим $[a_1, b_1]$. Очевидно, $f(a_1) < C < f(b_1)$ и $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ его средней точкой $\frac{a_1+b_1}{2}$ на два равных отрезка.

Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = C$, то $\xi = \frac{a_1+b_1}{2}$. Если же $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq C$, то выберем из получившихся отрезков тот, на левом конце которого значение функции меньше C, а на правом — больше C, и т. д. Тогда либо через конечное число шагов мы получим такую среднюю точку ξ некоторого отрезка, что $f(\xi) = C$, тогда теорема доказана, либо — такую систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, что

$$f(a_n) < C < f(b_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.9}$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{7.10}$$

Пусть ξ — общая точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$; тогда (см. замечание в п. 5.7)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

и, следовательно, в силу непрерывности функции f

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi). \tag{7.11}$$

Но в силу (7.9)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{7.12}$$

Из соотношений (7.11) и (7.12) следует, что $f(\xi) \leqslant C \leqslant f(\xi)$, т. е. что $f(\xi) = C$. $\lhd$

Следствие 2. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.*

Следствие 1 вытекает из того, что, принимая какие-либо значения в двух точках некоторого промежутка, непрерывная на нем функция, согласно теореме 2, принимает все промежуточные значения на отрезке с концами в этих точках. А этот отрезок, очевидно, содержится в рассматриваемом промежутке. Следствие 2 является частным случаем теоремы 2.

7.3. Обратные функции.

Лемма. *Если функция f строго возрастает* (см. п. 6.11) *на множестве X и $f(X) = Y$, то обратная функция f^{-1}* (см. п. 1.2) *является однозначной строго возрастающей на множестве Y функцией.*

$\rhd$ Докажем сначала однозначность обратной функции f^{-1}. Допустим противное: пусть существует такая точка $y \in Y$, что ее прообраз содержит по крайней мере две различные точки x_1 и x_2, т. е. $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$. Возможны два случая: либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 > x_2$. В первом случае в силу строгого возрастания функции f должно быть $f(x_1) < f(x_2)$, а во втором — $f(x_1) > f(x_2)$. И то, и другое невозможно, так как $f(x_1) = f(x_2)$.

Докажем теперь, что обратная функция f^{-1} строго возрастает на множестве $Y = f(X)$. Пусть $y_1 < y_2$, $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ и, следовательно, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Если бы $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = f(x_2)$, т. е. имело бы место равенство $y_1 = y_2$, а если бы $x_1 > x_2$, то в силу строгого возрастания функции f имело бы место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. $y_1 > y_2$. И то, и другое противоречит условию $y_1 < y_2$. Таким образом, остается возможным только случай $x_1 < x_2$. $\lhd$

Теорема 3. *Если функция f строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, то*

$$f([a, b]) = [A, B] \tag{7.13}$$

и обратная функция является однозначной строго возрастающей непрерывной на отрезке $[A, B]$ функцией.

$\rhd$ Докажем сначала равенство (7.13). Если $a \leqslant x \leqslant b$, то в силу возрастания функции f на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$A = f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = B.$$

С другой стороны, для любой точки $y \in [A, B]$ согласно теореме 2 о промежуточных значениях непрерывной функции найдется такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) = y$. Это и означает, что образом отрезка $[a, b]$ при отображении f является отрезок $[A, B]$ и, тем самым, отрезок $[A, B]$ является множеством, на котором определено обратное отображение (обратная функция) f^{-1}.

Однозначность функции f^{-1} и ее строгое возрастание на отрезке $[A, B]$ следуют из леммы. Докажем ее непрерывность на этом отрезке.

Выберем произвольно $y_0 \in [A, B]$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, $y_n \in [A, B]$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда из равенства (7.13) следует, что существуют такие точки $x_0 \in [a, b]$ и $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_n) = y_n, \tag{7.14}$$

т. е. $f^{-1}(y_0) = x_0$, $f^{-1}(y_n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0).$$

Допустим, что это не так. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что вне окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, а поэтому у нее существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, все члены которой также лежат вне окрестности $U(x_0, \varepsilon)$:

$$x_{n_k} \notin U(x_0, \varepsilon),$$

и, следовательно,

$$x_{n_k} \in [a, b] \setminus U(x_0, \varepsilon), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7.15}$$

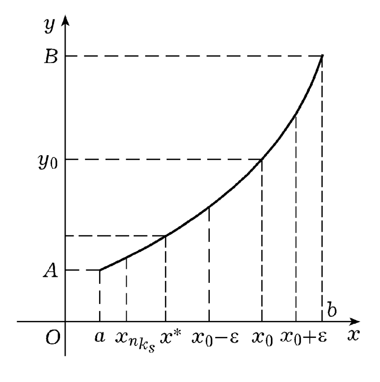


Рис. 70

Множество $[a, b] \setminus U(x_0, \varepsilon)$ является либо отрезком, либо объединением двух отрезков (рис. 70). По теореме Больцано–Вейерштрасса у подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ существует ее подпоследовательность $\{x_{n_{k_s}}\}$, сходящаяся к некоторой точке x^*:

$$\lim_{s\to\infty} x_{n_{k_s}} = x^*,$$

причем в силу (7.15)

$$x^* \in [a, b] \setminus U(x_0, \varepsilon).$$

Из этого включения, очевидно, вытекает, что

$$x_0 \neq x^*. \tag{7.16}$$

Из непрерывности функции f в точке x^* следует, что

$$\lim_{s\to\infty} f(x_{n_{k_s}}) = f(x^*).$$

Но предел подпоследовательности $\{f(x_{n_{k_s}})\}$ последовательности $y_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, равен пределу всей последовательности, поэтому

$$f(x^*) = \lim_{s\to\infty} f(x_{n_{k_s}}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{(7.14)}{=} \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

А так как $y_0 \underset{(7.14)}{=} f(x_0)$, то получилось, что $f(x^*) = f(x_0)$. Это же в силу взаимной однозначности отображения f противоречит неравенству (7.16). Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0),$$

т. е. обратная функция f^{-1} непрерывна в произвольно выбранной точке $y_0 \in [A, B]$. $\lhd$

Теорема 4. *Если функция f непрерывна и строго возрастает на интервале (a, b),*

$$A = \lim_{x\to a} f(x), \quad B = \lim_{x\to b} f(x), \tag{7.17}$$

то $f((a, b)) = (A, B)$ и обратная функция f^{-1} является однозначной строго возрастающей непрерывной на интервале (A, B) функцией.

$\rhd$ Поскольку из (7.17) следует, что

$$A = \inf_{(a,b)} f(x), \quad B = \sup_{(a,b)} f(x) \tag{7.18}$$

(см. теорему 4 из п. 6.11), то для любого $x \in (a, b)$ в силу определения нижней и верхней граней функции имеет место неравенство

$$A = \inf f \leqslant f(x) \leqslant \sup f = B.$$

Более того, для всех x, $a < x < b$, выполняется строгое неравенство $A < f(x) < B$. В самом деле, если бы нашлась, например, такая точка $x \in (a, b)$, что $f(x) = A$, то для любой точки x', $a < x' < x$, в силу строгого возрастания функции f имело бы место неравенство

$$f(x') < f(x) = A = \inf_{(a,b)} f(x),$$

что противоречит определению нижней грани. Итак,

$$f((a, b)) \subset (A, B). \tag{7.19}$$

Пусть теперь

$$A = \inf f < y < \sup f = B.$$

Тогда согласно определению нижней и верхней граней функции существуют такие точки $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$, что

$$A < f(x_1) < y < f(x_2) < B.$$

В силу строгого возрастания и непрерывности сужения функции f на отрезок $[x_1, x_2]$ обратная для него функция определена и непрерывна на отрезке $[f(x_1), f(x_2)]$ (см. теорему 3). А тогда, во-первых, существует такая точка $x \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, что $f(x) = y$ и, следовательно, $f((a, b)) = (A, B)$, а во-вторых, сужение на отрезок $[f(x_1), f(x_2)]$ обратной функции f^{-1} непрерывно во внутренней точке y отрезка $[f(x_1), f(x_2)]$, а поэтому в этой точке непрерывна и обратная функция f^{-1}, рассматриваемая на всем множестве своего определения, т. е. на интервале (A, B).

Отметим, что последнее заключение следует из того, что если сужение какой-либо функции на множество, содержащее некоторую окрестность заданной точки, непрерывно в этой точке, то и сама функция, рассматриваемая на всем множестве своего определения, непрерывна в указанной точке, так как непрерывность в точке зависит лишь от значений функции в достаточно малой окрестности этой точки. ◁

Отметим, что в теореме 4 интервалы (a, b) и (A, B) могут быть как конечными, так и бесконечными: $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant A < B \leqslant +\infty$.

Утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4, имеют место и для строго убывающих функций.

Пример. Функция $y = x^n$, $n \in N$, строго возрастает на полуоси $x > 0$ и непрерывна на всей числовой оси. Действительно, если $0 < x_1 < x_2$, то, умножая n раз это неравенство само на себя, получим $0 < x_1^n < x_2^n$; это и означает строгое возрастание рассматриваемой функции. Для доказательства ее непрерывности заметим, что функция $y = x$ непрерывна на всей числовой оси. В самом деле, каковы бы ни были $x_0 \in R$ и $\varepsilon > 0$, возьмем $\delta = \varepsilon$. Если $y_0 = x_0$, то $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Поэтому при $|\Delta x| < \delta$ получим $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а это и является условием непрерывности функции $y = x$. Функция же $y = x^n$ непрерывна на всей числовой оси (в частности, при $x > 0$) как произведение n непрерывных функций $y = x$.

Из того, что $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, следует согласно теореме 4, что множество значений функции $y = x^n$ на интервале $(0, +\infty)$ также является интервалом $(0, +\infty)$. Отсюда согласно той же теореме вытекает, что обратная функция $x = \sqrt[n]{y}$ определена, строго возрастает и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому, в частности, из любого положительного числа можно извлечь положительный корень n-й степени, и притом единственный, а следовательно, для любого рационального числа r однозначно определена степень a^r, $a > 0$, такая, что $a^r > 0$ (см. п. 2.1).

Замечание. Аналоги теорем 3 и 4 имеют место и для функций, строго монотонных и непрерывных на конечных или бесконечных

полуинтервалах вида $[a, b)$ и $(a, b]$. Их формулировка и доказательство по мере потребности предоставляются читателю.

7.4. Равномерная непрерывность. Если функция f непрерывна на отрезке, то это означает, что любой точки x этого отрезка и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (зависящее от точки x и числа ε), что для всех точек x' отрезка, для которых

$$|x' - x| < \delta, \tag{7.20}$$

выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon. \tag{7.21}$$

Если число δ можно выбрать не зависящим от точки x так, чтобы при выполнении условия (7.20) выполнялось условие (7.21), то функция f называется *равномерно непрерывной*. Сформулируем определение этого важного понятия более подробно.

Определение 2. Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *равномерно непрерывной на нем*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$ таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

В символической записи определение непрерывности функции на отрезке выглядит следующим образом:

$$\forall x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', \quad |x' - x| < \delta\colon \; |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x', \quad |x' - x| < \delta\colon \; |f(x') - f(x)| < \varepsilon. \tag{7.22}$$

Здесь точки x и x' принадлежат отрезку, на котором задана функция f.

Примеры. 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси R. Действительно, если задано $\varepsilon > 0$, то, выбрав $\delta = \varepsilon$, получим, что для любых точек x и x' таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| = |x' - x| < \delta = \varepsilon,$$

т. е. условия определения 1 выполнены.

2. Функция $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывна на всей числовой оси R.

Это следует из того, что для любого $h \neq 0$ имеет место

$$\lim_{x\to\infty} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{x\to\infty} [(x+h)^2 - x^2] = \lim_{x\to\infty} (2hx + h^2) = \infty. \tag{7.23}$$

Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, то, каково бы ни было $\delta > 0$, зафиксировав $h \neq 0$, $|h| < \delta$, можно в силу (7.23) так выбрать x, что для точек $x' = x + h$ и x будем иметь

$$|f(x') - f(x)| > \varepsilon,$$

и в то же время
$$|x' - x| = |h| < \delta.$$

Ясно, что всякая равномерно непрерывная на отрезке функция непрерывна на нем: если в определении равномерной непрерывности зафиксировать точку x, то получится определение непрерывности в этой точке. Верно и обратное утверждение.

Теорема 5 (Кантор). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

$\triangleright$ Докажем теорему от противного. Допустим, что существует непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция f, которая, однако, на нем не равномерно непрерывна. Это означает (см. (7.22)), что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$, что $|x' - x| < \delta$, но $|f(x') - f(x)| \geqslant \varepsilon$. В частности, для $\delta = 1/n$ найдутся такие точки, обозначим их x_n и x'_n, что
$$|x'_n - x_n| < \frac{1}{n}, \tag{7.24}$$
но
$$|f(x'_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{7.25}$$

Из последовательности точек $\{x_n\}$ в силу свойства компактности отрезка (см. теорему 4 в п. 5.8) можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим ее предел x_0:
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0. \tag{7.26}$$
Поскольку $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, то $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Функция f непрерывна в точке x_0, поэтому
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \underset{(7.26)}{=} f(x_0). \tag{7.27}$$
Подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ последовательности $\{x'_n\}$ также сходится в точке x_0, ибо
$$|x'_{n_k} - x_0| \leqslant |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \underset{(7.24)}{<} \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \underset{(7.26)}{\to} 0$$
при $k \to \infty$. Поэтому
$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0). \tag{7.28}$$

Из (7.27) и (7.28) следует, что
$$\lim_{k\to\infty} [f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$
а это противоречит условию, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство
$$|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| \underset{(7.25)}{\geqslant} \varepsilon_0 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. $\triangleleft$

Условие равномерной непрерывности можно сфомулировать в терминах так называемых колебаний функции на отрезках.

Определение 3. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда величина

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x, x' \in [a, b]} |f(x') - f(x)| \tag{7.29}$$

называется *колебанием функции f на отрезке* $[a, b]$.

Из двух значений $f(x') - f(x)$ и $f(x) - f(x')$ одно неотрицательно и, следовательно, не меньше второго, поэтому величина верхней грани и в правой части равенства не изменится, если вместо абсолютной величины $|f(x') - f(x)|$ разности $f(x') - f(x)$ взять саму эту разность:

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x, x' \in [a, b]} (f(x') - f(x)).$$

Справедливо следующее утверждение.

Для того чтобы функция f была равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любого отрезка $[x, x'] \subset [a, b]$ такого, что $0 < x' - x < \delta$, выполнялось неравенство

$$\omega(f; [x, x']) < \varepsilon. \tag{7.30}$$

$\triangleright$ Действительно, поскольку $x, x' \in [x, x']$, то из неравенства (7.30) следует, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, а поэтому выполняется утверждение (7.22).

Обратно, если справедливо утверждение (7.22), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек x и x' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$. В частности, это неравенство выполняется и для всех таких точек $x, x' \in [a, b]$, для которых $0 < x' - x < \delta$. Но для любых двух точек ξ и η отрезка $[x, x']$ выполняется, очевидно, неравенство $0 < |\eta - \xi| < x' - x < \delta$, а следовательно, и неравенство $|f(\eta) - f(\xi)| < \varepsilon/2$. Поэтому для любого отрезка $[x, x']$ такого, что $0 < x' - x < \delta$, имеем

$$\omega(f; [x, x']) = \sup_{\xi, \eta \in [x, x']} |f(\eta) - f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Утверждение доказано. $\triangleleft$

§ 8. Непрерывность элементарных функций

8.1. Многочлены и рациональные функции.

Теорема 1. *Многочлен непрерывен на всей числовой оси.*

$\triangleright$ Действительно, во-первых, постоянная на всей числовой оси функция непрерывна во всех точках (см. свойство 3° пределов функций

в п. 6.7); во-вторых, функции x^k, $k = 1, 2, \ldots$, также непрерывны на всей числовой оси (см. пример в п. 7.3), а любой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ является линейной комбинацией функций 1, x, x^2, ..., x^n с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, поэтому, согласно следствию из свойства 6° пределов функции в п. 6.7, он непрерывен на всей числовой оси. $\triangleleft$

Теорема 2. *Рациональная функция* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— многочлены, непрерывна во всех точках числовой оси, в которых* $Q(x) \neq 0$.

$\triangleright$ Это сразу следует из непрерывности многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ на всей числовой оси и непрерывности частного непрерывных функций во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль (см. следствие из свойства 6° пределов функций в п. 6.7). $\triangleleft$

8.2. Показательная и логарифмическая функции. Перечислим основные свойства степеней a^r, $a > 0$, с рациональными показателями $r \in Q$ (см. п. 2.1).

1°. *Пусть* $r_1 < r_2$. *Если* $a > 1$, *то* $a^{r_1} < a^{r_2}$, *а если* $a < 1$, *то* $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2°. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3°. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

Эти свойства доказываются в курсе элементарной математики в предположении существования и однозначной определенности a^r для любого рационального r, $a > 0$, а это было доказано в п. 7.3.

Вспомним еще, что $a^0 = 1$ и что $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$.

Из свойства 1° вытекает, что для любого $r \in Q$ выполняется неравенство $a^r > 0$. В самом деле, если $a \geqslant 1$ и $r \geqslant 0$, то по свойству 1° $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. Отсюда следует, что $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r} > 0$. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$.

Нашей ближайшей задачей является определение значения выражения a^x для любого действительного числа x и $a > 0$. Затем будут изучены свойства функции a^x.

Лемма 1. *Для любого* $a > 0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = \lim_{n \to \infty} a^{-1/n} = 1. \tag{8.1}$$

Следствие. *Для любого* $a > 0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{r \to 0,\, r \in Q} a^r = 1. \tag{8.2}$$

$\triangleright$ Пусть сначала $a > 1$. Для любого $n \in N$ положим

$$x_n = a^{1/n} - 1. \tag{8.3}$$

Поскольку $\frac{1}{n} > 0$, то $a^{1/n} > a^0 = 1$ и, следовательно,

$$x_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.4}$$

Из (8.3) и (8.4) вытекает, что

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \ldots > nx_n.$$

Отсюда и из неравенства (8.4) получаем $0 < x_n < \frac{a}{n}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, что в силу (8.3) и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1. \tag{8.5}$$

Если $a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и потому

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{1/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n}} \underset{(8.5)}{=} 1.$$

Наконец, если $a = 1$, то утверждение (8.1) очевидно, так как

$$1^{1/n} = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из доказанного следует, что при любом $a > 0$ имеет место и равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1. \quad \lhd$$

Докажем следствие.

$\rhd$ Для всех $a > 0$ функция a^r монотонна на множестве рациональных чисел Q. Для каждого действительного числа x множества рациональных чисел $r < x$ и $r > x$ не пусты и точка x является их точкой прикосновения. Поэтому, согласно следствию из теоремы 4 п. 6.11, существуют односторонние пределы $\lim\limits_{r\to x-0} a^r$ и $\lim\limits_{r\to x+0} a^r$, $r \in Q$. В частности, указанные пределы существуют для $x = 0$. Согласно определению предела функции в терминах последовательностей их значения равны соответственно значению последовательностей a^{r_n} при любых последовательностях $r_n < 0$ и $r_n > 0$, стремящихся к нулю, $r_n \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$ Выбрав $r_n = -\frac{1}{n}$ и $r_n = \frac{1}{n}$, для которых пределы уже вычислены (см. (8.1)), в силу сказанного получим

$$\lim_{r\to -0} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1, \quad \lim_{r\to +0} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, \tag{8.6}$$

т. е. односторонние пределы в точке $x = 0$ функции a^r, $r \in Q$, $r \neq 0$, равны и, следовательно, согласно теореме 2 п. 6.6, существует двусторонний предел $\lim\limits_{r\to 0,\ r\neq 0} a^r = 1$. Он совпадает со значением $a^0 = 1$

функции a^r при $r=0$, а поэтому (см. лемму 5 в п. 6.9) она непрерывна в нуле:

$$\lim_{r\to 0} a^r = a^0 = 1, \quad r \in Q, \quad a > 0.$$

Равенство (8.2) доказано. $\lhd$

Определение. Пусть $a>0$ и $x \in R$. Определим a^x как предел a^r по множеству рациональных чисел Q, когда $r \to x$, т. е.

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{r\to x\\ r\in Q}} a^r. \tag{8.7}$$

Докажем, что это определение корректно, т. е. покажем, используя критерий Коши для предела функции (см. теорему 5 в п. 6.12), что предел (8.7) существует.

$\rhd$ Пусть $a \geqslant 1$ и $x \in R$. В силу принципа Архимеда существует натуральное n такое, что

$$n > x. \tag{8.8}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно следствию леммы 1 существует такое $\delta > 0$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих неравенству

$$|r| < \delta, \tag{8.9}$$

выполняется неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{a^n}. \tag{8.10}$$

Если это условие выполняется для некоторого $\delta > 0$, то оно заведомо выполняется и для всякого меньшего положительного δ. Поэтому указанное $\delta > 0$ можно всегда выбрать так, чтобы выполнялось неравенство (см. (8.8))

$$x + \frac{\delta}{2} < n. \tag{8.11}$$

Если рациональные числа r' и r'' принадлежат $\frac{\delta}{2}$-окрестности точки x:

$$|r' - x| < \frac{\delta}{2}, \quad |r'' - x| < \frac{\delta}{2},$$

и, следовательно,

$$|r'' - r'| \leqslant |r'' - x| + |x - r'| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \tag{8.12}$$

то, заметив, что $r' < x + \frac{\delta}{2} \underset{(8.11)}{<} n$, будем иметь

$$|a^{r''} - a^{r'}| = a^{r'}|a^{r''-r'} - 1| \underset{\substack{(8.8)\\(8.11)}}{<} a^n|a^{r''-r'} - 1| \underset{\substack{(8.9),\,(8.10)\\(8.12)}}{<} a^n \frac{\varepsilon}{a^n} = \varepsilon.$$

Таким образом, для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения условий $|r' - x| < \frac{\delta}{2}$, $|r'' - x| < \frac{\delta}{2}$ вы-

текает неравенство

$$|a^{r''} - a^{r'}| < \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши это означает существование конечного предела $\lim\limits_{r \to x,\ r \in Q} a^r$ для всех $x \in R$, $a \geqslant 1$. Этот предел обозначается a^x.

Если $0 < a < 1$, то $b = \dfrac{1}{a} > 1$, и для любого $x \in R$ предел

$$\lim_{\substack{r \to x \\ r \in Q}} a^r = \frac{1}{\lim\limits_{r \to x,\ r \in Q} b^r}$$

также существует. ◁

Отметим, что если $x \in Q$, то определение (8.7) совпадает с уже известным определением рациональной степени a^r числа a, $r \in Q$. Действительно, в силу доказанного предел $\lim\limits_{r \to x,\ r \in Q} a^r = a^x$ существует и для любой последовательности $r_n \to x$, $r_n \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$, равен пределу $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$. В случае $x = r \in Q$ за указанную последовательность можно взять стационарную последовательность $r_n = r$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда будем иметь

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim_{n \to \infty} a^r = a^r.$$

Из определения функции a^x следует, что для любого действительного числа x выполняется равенство

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{8.13}$$

Действительно, это равенство имеет место для рациональных значений $x = r \in Q$, поэтому для любого действительного x получаем

$$a^{-x} \underset{(8.7)}{=} \lim_{-r \to -x} a^{-r} = \lim_{r \to x} \frac{1}{a^r} \underset{(8.7)}{=} \frac{1}{a^x}.$$

Функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in R$, называется *показательной функцией.*

В случае $a = e$ функция e^x обозначается также $\exp x$ и называется *экспонентой.*

Теорема 3. *Показательная функция a^x, $a > 0$, обладает следующими свойствами.*

1°. *При $a > 1$ она строго возрастает, а при $a < 1$ строго убывает на всей числовой оси.*

2°. *Для любых $x \in R$ и $y \in R$ имеет место равенство $a^x a^y = a^{x+y}$.*

3°. *Для любых $x \in R$ и $y \in R$ имеет место равенство $(a^x)^y = a^{xy}$.*

4°. *Функция a^x непрерывна на всей числовой оси.*

5°. *Областью значений функции a^x является множество всех положительных чисел, т. е. бесконечный интервал $(0, +\infty)$.*

$\triangleright$ Доказательство. 1°. Пусть для определенности $a > 1$ и $x < y$. Существуют такие рациональные числа r' и r'', что

$$x < r' < r'' < y.$$

Возьмем последовательности рациональных чисел $r'_n \to x$ и $r''_n \to y$ такие, что $r'_n < r' < r'' < r''_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда в силу свойства 1° степеней с рациональными показателями будем иметь

$$a^{r'_n} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^y,$$

т. е. при $x < y$ имеет место неравенство $a^x < a^y$.

Отметим, что из 1° и того, что для любого рационального r имеет место неравенство $a^r > 0$, следует, что для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$a^x > 0. \tag{8.14}$$

В самом деле, если, например, $a \geqslant 1$ и $x \in R$, то, выбрав рациональное число r так, чтобы выполнялось неравенство $r < x$, получим $a^x > a^r > 0$. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$.

Доказательство. 2°. Пусть $x \in R$, $y \in R$, $r'_n \in Q$, $r''_n \in Q$, $r'_n \to x$, $r''_n \to y$ и, следовательно, $r'_n + r''_n \to x + y$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$a^x a^y \underset{(8.7)}{=} \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} \underset{\text{п. } 6.7}{=} \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} a^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} \underset{(8.7)}{=} a^{x+y}.$$

Доказательство. 4° (свойство 3° будет доказано позже). Покажем, что функция a^x непрерывна на всей числовой оси. Пусть $x_0 \in R$. В силу монотонности функции a^x (см. свойство 1°) существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} a^x$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} a^x$. Ясно, что они совпадают соответственно с односторонними пределами $\lim\limits_{r\to x_0-0,\, r\in Q} a^r$ и $\lim\limits_{r\to x_0+0,\, r\in Q} a^r$ сужения функции a^x на множество рациональных чисел Q, из которого удалена точка x_0, если она рациональная. Эти пределы в свою очередь совпадают с двусторонним пределом $\lim\limits_{r\to x_0, r\in Q} a^r = a^{x_0}$ (см. формулу (8.7)). Таким образом,

$$\lim_{x\to x_0-0} a^x = \lim_{r\to x_0-0,\, r\in Q} a^r = a^{x_0} = \lim_{r\to x_0+0,\, r\in Q} a^r = \lim_{x\to x_0+0} a^x.$$

В силу равенства односторонних пределов

$$\lim_{x\to x_0-0} a^x = a^{x_0} = \lim_{x\to x_0+0} a^x$$

согласно теореме 2 из п. 6.6 существует двусторонний предел

$$\lim_{x\to x_0,\ x\neq x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Отсюда в силу леммы 5 из п. 6.9 следует, что в точке x_0 предел функции a^x существует и без ограничения $x \neq x_0$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}. \tag{8.15}$$

Это и означает, что функция a^x, $x \in R$, непрерывна в любой точке $x_0 \in R$.

Доказательство. 3°. Пусть сначала $y = p$ — натуральное число; тогда, применив p раз свойство 2°, получим

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \ldots \cdot a^x}_{p\ \text{раз}} = a^{\overbrace{x+x+\ldots+x}^{p\ \text{раз}}} = a^{xp}. \tag{8.16}$$

Если $y = 1/q$, где q — натуральное число, то

$$(a^x)^{1/q} = a^{x/q}. \tag{8.17}$$

В самом деле, согласно определению корня для доказательства справедливости равенства (8.17) надо показать, что

$$(a^{x/q})^q = a^x,$$

а это равенство сразу следует из свойства (8.16):

$$(a^{x/q})^q \underset{(8.16)}{=} a^{(x/q)q} = a^x.$$

Если $y = p/q$, где p и q — натуральные числа, то

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} \underset{(8.16)}{=} (a^{xp})^{1/q} \underset{(8.17)}{=} a^{xp/q}. \tag{8.18}$$

Если же $y = -p/q$, то

$$(a^x)^{-p/q} \underset{(8.13)}{=} \frac{1}{(a^x)^{p/q}} \underset{(8.18)}{=} \frac{1}{a^{xp/q}} \underset{(8.13)}{=} a^{-xp/q}. \tag{8.19}$$

Наконец, при $y = 0$, очевидно,

$$(a^x)^0 = 1 = a^0 = a^{x\cdot 0}. \tag{8.20}$$

Таким образом, для любого рационального числа r справедливо равенство

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{8.21}$$

Пусть теперь y — произвольное действительное число. Возьмем какую-либо последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, имеющую своим пределом число y, т. е. $r_n \to y$, $r_n \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$(a^x)^{r_n} \underset{(8.21)}{=} a^{xr_n}. \tag{8.22}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n = xy$, то в силу непрерывности функции a^x на всей числовой оси имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{xr_n} = a^{xy}, \tag{8.23}$$

а в силу определения (8.7) степени числа — равенство

$$\lim_{n\to\infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \tag{8.24}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (8.22), в силу (8.23) и (8.24) получим $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доказательство. 5°. Поскольку функция a^x строго монотонная, то для того чтобы доказать, что ее областью значений является бесконечный интервал $(0, +\infty)$, надо согласно теореме 4 п. 7.3 доказать, например, при $a > 1$, что

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty. \tag{8.25}$$

Эти пределы (конечные или бесконечные) в силу монотонности функции всегда существуют (см. п. 6.11), поэтому достаточно лишь доказать, что для каких-либо фиксированных последовательностей $x_n \to -\infty$ и $x'_n \to +\infty$ имеют место равенства $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x'_n} = +\infty$, например, что эти равенства справедливы для последовательностей $x_n = -n$ и $x'_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ А это было доказано выше (см. пример 4 в п. 5.1).

Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической* и обозначается $\log_a y$. В силу свойства 5° показательной функции логарифм $\log_a y$ определен для любого положительного числа. Число a называется *основанием логарифмической функции* $y = \log_a x$. Особую роль в математическом анализе играет логарифмическая функция с основанием $a = e$, она обозначается $\ln x$ и называется *натуральным логарифмом.*

Согласно определению обратной функции справедливо тождество

$$a^{\log_a x} = x. \tag{8.26}$$

Теорема 4. *Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, определена и непрерывна при любом $x > 0$. При этом она строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$.*

▷ Это непосредственно следует из свойств 1°, 4° и 5° показательной функции (теорема 3) и теоремы 4 из п. 7.3. ◁

Подчеркнем, что нами, в частности, доказано, что при любом основании $a > 0$, $a \neq 1$, логарифм $\log_a x$ определен для любого положительного числа x.

Из свойств 2° и 3° показательной функции следуют соответствующие свойства логарифма произведения и степени:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad x > 0, \quad y > 0, \tag{8.27}$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \quad x > 0, \quad \alpha \in R. \tag{8.28}$$

Докажем, например, формулу (8.28). Согласно свойству 3° показательной функции из теоремы 3 имеем

$$(a^\beta)^\alpha = a^{\beta\alpha}, \quad \beta \in R, \quad \alpha \in R. \tag{8.29}$$

Поэтому

$$\log_a x^\alpha \underset{(8.26)}{=} \log_a (a^{\log_a x})^\alpha \underset{(8.29)}{=} \log_a a^{\alpha \log_a x} \underset{(8.26)}{=} \alpha \log_a x.$$

Из формул (8.27) и (8.28) следует формула для логарифма частного:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} \underset{(8.27)}{=} \log_a x + \log_a y^{-1} \underset{(8.28)}{=} \log_a x - \log_a y.$$

С помощью перечисленных свойств показательной и логарифмической функций можно получить и другие их свойства.

Докажем, например, равенство

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

В случае $a = 1$ или $b = 1$ написанное равенство очевидно. Если же $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то

$$(ab)^x \underset{(8.26)}{=} (a a^{\log_a b})^x \underset{2^\circ}{=} (a^{1+\log_a b})^x \underset{3^\circ}{=} a^{x(1+\log_a b)} =$$
$$= a^x a^{x \log_a b} \underset{(8.28)}{=} a^x a^{\log_a b^x} \underset{(8.26)}{=} a^x b^x.$$

8.3. Степенная функция. Функция $y = x^\alpha$, $x > 0$, называется *степенной функцией* ($\alpha \in R$).

Теорема 4. *При любом $\alpha \in R$ степенная функция x^α непрерывна при всех $x > 0$.*

▷ Это сразу следует из того, что степенную функцию x^α можно представить как композицию непрерывных функций — логарифмической и показательной. В самом деле, поскольку $x = e^{\ln x}$, то

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = e^u, \quad u = \alpha \ln x. \ ◁$$

В точке $x = 0$ функция x^α определена не для всех значений показателя α. Если $\alpha > 0$, то существует предел $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha = \lim\limits_{x\to+0} e^{\alpha\ln x} = 0$. По определению полагают

$$0^\alpha = 0, \quad \alpha > 0. \tag{8.30}$$

Это определение согласуется с тем, что при рациональных $\alpha = r > 0$ имеет место $0^r = 0$. Кроме того, естественность определения (8.30) оправдывается и тем, что, если в определении (8.7) взять $a = 0$ (раньше предполагалось, что $a > 0$), то будем иметь

$$0^\alpha = \lim_{r\to\alpha,\, r\in Q,\, r>0} 0^r = 0, \quad \alpha > 0.$$

При определении (8.30) функция x^α оказывается непрерывной справа в точке $x = 0$ при любом $\alpha > 0$.

Функция x^α может оказаться определенной при некоторых рациональных $\alpha \neq 0$ и для $x < 0$, например, $x^{\pm n}$, $x^{\pm 1/(2n-1)}$, $n \in N$. Степенная функция x^α непрерывна во всех точках, в которых она определена. Это следует из того, что если она определена при $x < 0$, то является четной или нечетной функцией.

8.4. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Лемма 2. *Для любого действительного числа x имеет место неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|. \tag{8.31}$$

$\triangleright$ Рассмотрим на координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат O. Если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $OA = R$, $\angle AOC = x$ (рис. 71), то

$$0 \leqslant \sin x = \frac{|AC|}{R} = \frac{|AB|}{2R} \leqslant \frac{|\overset{\frown}{AB}|}{2R} = x,$$

где $|AB|$ — длина хорды, соединяющей точки A и B, $|\overset{\frown}{AB}|$ — длина дуги окружности,

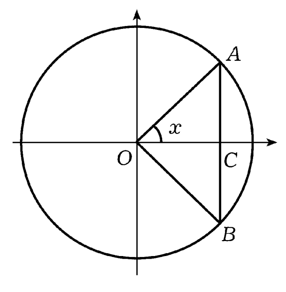


Рис. 71

соединяющей эти точки, а отношение $\frac{|\overset{\frown}{AB}|}{R}$ равно радианной мере угла $\angle AOB$, т. е. равно $2x$. Таким образом, неравенство (8.31) для случая $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ доказано.

Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, то $0 < -x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и потому по уже доказанному $|\sin x| = \sin(-x) \leqslant -x = |x|$, т. е. в этом случае неравенство (8.31) также справедливо.

Наконец, если $|x| > \frac{\pi}{2} > 1$, то неравенство (8.31) очевидно, ибо $|\sin x| \leqslant 1$. $\triangleleft$

Теорема 5. *Функции* $y = \sin x$ *и* $y = \cos x$ *непрерывны на всей числовой оси.*

▷ Докажем, например, непрерывность функции $y = \sin x$:

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = 2\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|, \quad (8.32)$$

ибо

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1, \quad \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{2}.$$

Из неравенства (8.32) сразу следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$; это и означает непрерывность функции $y = \sin x$ в произвольной точке $x \in R$. ◁

Следствие. *Функции* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *и* $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *непрерывны во всех точках числовой оси, кроме тех, в которых их знаменатели обращаются в нуль.*

▷ Это сразу следует из непрерывности частного непрерывных функций в точках, в которых делитель не обращается в нуль (см. следствие из свойства 6° пределов функций в п. 6.7). ◁

Теорема 6. *Каждая из обратных тригонометрических функций* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ *и* $y = \operatorname{arcctg} x$ *непрерывна в области своего определения.*

▷ Это в силу теоремы о непрерывности обратных функций (см. п. 7.3) сразу следует из теорем 3 и 4. ◁

8.5. Элементарные функции.

Теорема 7. *Каждая элементарная функция непрерывна в области своего определения.*

▷ В самом деле, согласно теоремам 1–6 все основные элементарные функции непрерывны на множествах, на которых они определены. Поэтому непрерывна в области своего определения и каждая функция, которая может быть получена из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операции композиции функций, т. е. каждая элементарная функция (определение элементарной функции см. в п. 3.2). ◁

§ 9. Сравнение функций

9.1. Замечательные пределы. В этом пункте будут вычислены пределы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, которые обычно называются замечательными пределами.

I. *Докажем, что*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \quad (9.1)$$

▷ Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат. Если (рис. 72) $OA = R$, $\angle AOB = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $AC \perp OA$, то пл. $\Delta OAB <$ пл. сектора $OAB <$ пл. ΔOAC, т. е. $\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$; отсюда

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

или

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

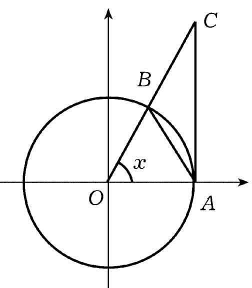


Рис. 72

В силу четности функций $\frac{x}{\sin x}$ и $\frac{1}{\cos x}$ это неравенство справедливо и для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Перейдя в этом неравенстве к пределу при $x \to 0$ и заметив, что в силу непрерывности функции $\cos x$ при $x = 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

что равносильно равенству (9.1). ◁

С помощью предела (9.1) вычисляется ряд других пределов, например,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \underset{x=\sin y}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

II. *Докажем, что*

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{9.2}$$

▷ Мы уже знаем (см. п. 5.7), что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Более того, из замечания 2 в п. 6.1 следует, что для любой последовательности $n_k \in N$, $n_k \to +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, также имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{9.3}$$

Пусть $x_k > 0$ и $x_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Положим $n_k = \left[\frac{1}{x_k}\right]$, где $\left[\frac{1}{x_k}\right]$ — целая часть числа $\frac{1}{x_k}$, тогда

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \tag{9.4}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{n_k + 1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k}. \tag{9.5}$$

Кроме того, согласно условию $x_k \to 0$ имеем $\dfrac{1}{x_k} \to \infty$, откуда в силу неравенства (9.4) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty. \tag{9.6}$$

В результате имеем

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}, \tag{9.7}$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)} \underset{(9.3)}{=} e, \tag{9.8}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) \underset{(9.3)}{=} e. \tag{9.9}$$

Из (9.7), (9.8) и (9.9) следует, что (см. обозначения в п. 6.6)

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{9.10}$$

Пусть теперь $x_k < 0$ и $x_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Положим $y_k = -x_k$, тогда $y_k > 0$ и $y_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Без ограничения общности будем считать, что $y_k < 1$ (с некоторого номера это неравенство заведомо выполняется). Имеем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = \lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-1/y_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{1/y_k} =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-y_k+y_k}{1-y_k}\right)^{(1-y_k+y_k)/y_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{(1-y_k)/y_k+1}. \tag{9.11}$$

Положим теперь $z_k = \dfrac{y_k}{1-y_k}$. Очевидно,

$$z_k > 0, \quad z_k \to 0. \tag{9.12}$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} \underset{(9.11)}{=} \lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{1/z_k+1} =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{1/z_k}\lim_{x\to\infty}(1+z_k) \underset{\substack{(9.10)\\(9.12)}}{=} e. \tag{9.13}$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x} \underset{\substack{(9.10)\\(9.13)}}{=} e.$$

Отсюда в силу теоремы 2 из п. 6.6 и следует равенство (9.2). ◁

Вычислим с помощью (9.2) некоторые другие пределы. Покажем прежде всего, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad a>0,\quad a\neq 1, \tag{9.14}$$

в частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{9.15}$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

Докажем еще, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0,\quad a\neq 1, \tag{9.16}$$

в частности, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{9.17}$$

Действительно, положив $y=a^x-1$ и, следовательно, $x=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$, получим $\lim\limits_{x\to 0}y=0$, а поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}\underset{(9.15)}{=}\ln a.$$

9.2. Сравнение функций в окрестности заданной точки. Как известно, сумма, разность и произведение бесконечно малых являются бесконечно малыми. Частное же бесконечно малых может быть и не бесконечно малой, однако отношение бесконечно малых позволяет сравнивать их "по порядку убывания". Аналогично можно сравнивать "по порядку роста" бесконечно большие. Перейдем к точным определениям.

Пусть функции f и g заданы на множестве X и x_0 — конечная или бесконечная удаленная точка прикосновения этого множества. При этом возможны случаи, когда $x_0\in X$ и когда $x_0\notin X$.

Будем предполагать, что существуют такие окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0 и функция φ, заданная на $X\cap U$, что для всех $x\in X\cap U$ выполняется равенство

$$f(x)=\varphi(x)g(x). \tag{9.18}$$

В частности, если функции f и g заданы в точке x_0, то и функция φ задана в этой точке, а если f и g не заданы в ней, то не задана в ней и функция φ.

Определение 1. Функция f называется *функцией, ограниченной относительно функции g в окрестности точки x_0*, если функция φ ограниченна.

В этом случае существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant c, \tag{9.19}$$

а следовательно, и неравенство

$$|f(x)| \underset{\substack{(9.18)\\(9.19)}}{\leqslant} c|g(x)|. \tag{9.20}$$

Условие (9.20) равносильно условиям (9.18) и (9.19). Действительно, если выполняется условие (9.20), то при

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)}, & \text{если} \quad g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad g(x) = 0, \end{cases}$$

выполняются условия (9.18) и (9.19).

Если функция f ограничена относительно функции g в окрестности точки x_0, то пишут

$$f = O(g), \quad x \to x_0 \tag{9.21}$$

(читается: f есть “O большое” от g).

Определение 2. Функция f называется *функцией того же порядка* при $x \to x_0$, *что и функция* g, если существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что для всех $x \in X \cap U$ выполняется неравенство

$$c_1 \leqslant |\varphi(x)| \leqslant c_2. \tag{9.22}$$

В этом случае для всех $x \in X \cap U$ выполняется неравенство

$$c_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant c_2|g(x)|. \tag{9.23}$$

Если функция f того же порядка при $x \to x_0$, что и функция g, то пишут $f \cong g$, $x \to x_0$.

Очевидно, что функция f того же порядка при $x \to x_0$, что и функция g, тогда и только тогда, когда $f = O(g)$ и $g = O(f)$, $x \to x_0$.

Определение 3. Функция f называется *бесконечно малой относительно функции g при $x \to x_0$*, если функция φ бесконечно малая при $x \to x_0$, т. е. если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0. \tag{9.24}$$

В этом случае пишут

$$f = o(g), \quad x \to x_0 \tag{9.25}$$

(читается: f есть “o малое” от g при $x \to x_0$).

Определение 4. Функция f называется *эквивалентной функции g* (или *асимптотически равной ей*) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{9.26}$$

В этом случае пишут

$$f \sim g, \quad x \to x_0.$$

З а м е ч а н и е 1. Если $x_0 \in X$, то, как известно (см. п. 6.2), из существования предела $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Поэтому в случае (9.24) имеем $\varphi(x_0) = 0$, а в случае (9.26) — $\varphi(x_0) = 1$.

Если $f = o(g)$, $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то функция f называется *бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая* g. В случае $f = o(g^n)$, $x \to x_0$, бесконечно малую f называют *бесконечно малой порядка* n относительно бесконечно малой g.

З а м е ч а н и е 2. Если в условиях определений 3 или 4 функция g не обращается в нуль на множестве $X \cap U$ и $x_0 \notin X$, то условие (9.24) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \tag{9.27}$$

а условие (9.26) — в виде

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{9.28}$$

З а м е ч а н и е 3. Если $x_0 \notin X$ и существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \tag{9.29}$$

то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничена на пересечении некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 с множеством X (см. свойство 1° пределов функций в п. 6.7), т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in$ $\in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant c$, т. е.

$$|f(x)| \leqslant c|g(x)|,$$

откуда следует, что при выполнении условия (9.29) имеет место соотношение

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

З а м е ч а н и е 4. В определениях 1–4 функции f и g могут быть последовательностями $f = \{x_n\}$, $g = \{y_n\}$, и, таким образом, указанные определения содержат в себе определения следующих понятий:

а) последовательности, ограниченной относительно другой последовательности: $x_n = O(y_n)$, $n \to \infty$;

б) последовательностей одного порядка: $x_n \cong y_n$, $n \to \infty$;

в) асимптотически равных последовательностей: $x_n \sim y_n$, $n \to \infty$;

г) последовательности, бесконечно малой по сравнению с другой последовательностью: $x_n = o(y_n)$, $n \to \infty$.

Примеры. 1. $\sin 2x = O(x)$, $x \to 0$, ибо

$$|\sin 2x| \leqslant 2|x|. \tag{9.30}$$

Верно и соотношение $x = O(\sin 2x)$, $x \to 0$, ибо существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}$, и, следовательно, функция $\dfrac{x}{\sin 2x}$ ограничена в некоторой окрестности $U(0)$ точки $x = 0$ (см. свойство 1° пределов функций в п. 6.7). Иначе говоря, существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in U(0)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x}{\sin 2x}\right| \leqslant c$, $x \neq 0$, поэтому

$$|x| \leqslant c|\sin 2x|, \quad x \in U(0). \tag{9.31}$$

Из (9.30) и (9.31) следует, что при $x \to 0$ функции $y = x$ и $y = \sin 2x$ одного порядка:

$$\sin 2x \cong x, \quad x \to 0.$$

2. $x^3 = o(x^2)$, $x \to 0$, ибо $x^3 = x \cdot x^2$ и $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

3. $x^2 = o(x^3)$, $x \to \infty$, ибо $x^2 = \dfrac{1}{x} \cdot x^3$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то функции $y = x$ и $y = \sin x$ эквивалентны при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad x \to 0.$$

Замечание 5. Символы $O(g)$ и $o(g)$ по существу обозначают целые классы функций, обладающих по сравнению с данной функцией определенным свойством, поэтому равенства типа $f(x) = O(g(x))$ и $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, следует читать только слева направо, например, $x^2 = o(x)$, $x \to 0$. Здесь верно то, что функция $y = x^2$ является при $x \to 0$ бесконечно малой по сравнению с функцией $y = x$, но не всякая функция, бесконечно малая по сравнению с функцией $y = x$, является функцией $y = x^2$. Равенства с символами O и o не обладают и рядом других свойств равенств, например, свойством транзитивности:

$$x^2 = o(x), \quad x^3 = o(x), \quad x \to 0,$$

но $x^2 \neq x^3$.

9.3. Эквивалентные функции. Примеры эквивалентных функций (см. определение 3 в п. 9.2) легко получить из результатов в п. 9.1:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad x \to 0.$$

Теорема 1. *Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to 0. \tag{9.32}$$

▷ Формула (9.32) является просто другой записью определения 4. Действительно, условие (9.26) $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=1$ равносильно условию $\varphi(x)=1+\varepsilon(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. Поэтому условие

$$f(x)=\varphi(x)g(x),\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1, \tag{9.33}$$

равносильно условию

$$f(x)=(1+\varepsilon(x))g(x)=g(x)+\varepsilon(x)g(x),\quad \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0, \tag{9.34}$$

т. е. условию $f(x)=g(x)+o(g(x))$, $x\to x_0$. ◁

Замечание 1. Если $g(x)\neq 0$, $x\in X$, $x\neq x_0$, то условие (9.32) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0.$$

Оно означает, что относительная погрешность $\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}$ между эквивалентными функциями f и g является бесконечно малой при $x\to x_0$.

Пример 5. $\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{x}+o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$, $x\to 0$. Чтобы в этом убедиться, в силу теоремы 1 достаточно показать, что $\operatorname{ctg}x\sim\dfrac{1}{x}$, $x\to 0$. Это же сразу следует из того, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$ (см. п. 9.1), ибо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}=1.$$

Теорема 2. *Если $f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim g_1(x)$, $x\to x_0$, то пределы* (*конечные или бесконечные*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *одновременно существуют или нет*, *при этом*, *если они существуют*, *то они равны*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{9.35}$$

▷ Условия $f\sim f_1$ и $g\sim g_1$, $x\to x_0$ означают, что существуют такие окрестность $U=U(x_0)$ и функции φ и ψ, определенные на пересечении $X\cap U$, что

$$f(x)=\varphi(x)f_1(x),\quad g(x)=\psi(x)g_1(x),\quad x\in X\cap U, \tag{9.36}$$

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=1. \tag{9.37}$$

Поэтому функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ отличаются друг от друга на множитель $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, имеющий в точке x_0 предел, равный 1:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{9.38}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)}=1. \tag{9.39}$$

Поэтому $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ одновременно имеют или нет конечный или бесконечный предел в точке x_0. Если он существует, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{(9.38)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\underset{(9.39)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.\ \triangleleft$$

Пример 6. Найдем $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$. Поскольку

$$\ln(1+x)\sim x,\quad \sin 2x\sim 2x,\quad x\to 0,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}=\lim_{x\to x_0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Замечание 2. Понятия функции, ограниченной по сравнению с другой функцией, функций одного порядка, функций, эквивалентных между собой, функции, бесконечно малой по сравнению с другой функцией, переносятся и на случай комплекснозначных функций комплексного аргумента. Все сформулированные выше определения остаются по форме прежними, только аргумент и значения рассматриваемых функций могут принимать комплексные значения и предел понимания в смысле предела функций комплексного переменного (см. п. 6.14).

Остаются верными и аналоги теорем 1 и 2. Правда, многие из данных выше примеров нуждаются в определениях рассматриваемых в них функций (синуса, косинуса и т.д.) для комплексных значений аргумента; к этому мы вернемся в п. 41.4.

§ 10. Производная и дифференциал

10.1. Определение производной. Пусть функция $y=f(x)$ задана в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0\in R$, $x\in U(x_0)$ и, следовательно, функция

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

определена на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

Определение 1. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то он называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом,

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (10.1)$$

Образно говоря, это равенство означает, что производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна скорости изменения переменной y относительно переменной x в указанной точке.

Если положить $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, не писать аргумент и обозначить производную через y', то получим определение (10.1) в виде

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (10.2)$$

Иногда производная обозначается не только штрихом, но еще указывается в виде нижнего индекса переменная, по которой берется производная, т. е. пишут y'_x, а также просто y_x.

Если предел (10.1) равен ∞, $+\infty$ и $-\infty$, то производная $f'(x_0)$ называется бесконечной.

Всегда, когда говорится о существовании производной (конечной или бесконечной) в некоторой точке, подразумевается (согласно определению производной), что функция определена в какой-то окрестности рассматриваемой точки.

Под производной всегда понимается конечная производная: в случае, когда допускаются бесконечные производные (определенного знака или знаконеопределенные), это специально оговаривается.

Если функция f определена на некотором отрезке $[a, b]$, то под ее производной в точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ обычно понимается соответственно предел справа или слева отношения $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$. Эти пределы называют также производными соответственно справа и слева.

Операция вычисления производной функции называется операцией *дифференцирования*.

Примеры. 1. $y = c$ — постоянная функция. Имеем $\Delta y = c - c = 0$, следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т. е. $c' = 0$.

2. $y = \sin x$. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2},$$

поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \underset{(9.1)}{=} \cos x,$$

т. е. $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

3. $y = a^x$, $a > 0$. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \underset{(9.16)}{=} a^x \ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$.

10.2. Дифференциал функции.

Определение 2. Функция $y = f(x)$, заданная в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in R$, называется *дифференцируемой в этой точке*, если ее приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0,$$

представимо в этой окрестности в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{10.3}$$

где A — постоянная.

Линейная функция $A\Delta x$ (аргумента Δx) называется *дифференциалом функции f в точке* x_0 и обозначается $df(x_0)$ или, короче, dy. Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{10.4}$$

$$dy = A\Delta x. \tag{10.5}$$

Так как при $A \neq 0$ имеет место равенство (двустороннее)

$$o(\Delta x) = o(A\Delta x),$$

то из соотношения (10.3) при $A \neq 0$ следует, что $\Delta y = dy + o(dy)$, $\Delta x \to 0$, т. е. что функции Δy и dy переменной Δx эквивалентны при $\Delta x \to 0$ (см. теорему 1 в п. 9.3), причем, dy — линейная функция аргумента Δx, а Δy, вообще говоря, — функция более сложной структуры.

Для симметрии записи приращение независимого переменного Δx обозначается dx, т. е. $dx \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x$. Поэтому формулу (10.5) можно записать в виде

$$dy = A dx. \tag{10.6}$$

Вспомнив определение $o(\Delta x)$ (см. определение 3 в п. 9.2), условие (10.3) можно переписать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \tag{10.7}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0. \tag{10.8}$$

Здесь функция $\varepsilon(\Delta x)$ определена для тех Δx, для которых определена функция $o(\Delta x) = \Delta y - A\Delta x$ в формуле (10.3) (см. определение 4 в п. 9.2), т. е. для всех таких Δx, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ (см. определение 2), в частности для $\Delta x = 0$. Именно по множеству таких Δx и берется предел (10.8), а так как точка $\Delta x = 0$ принадлежит этому множеству, то функция $\varepsilon(\Delta x)$ непрерывна в этой точке (см. п. 6.2), и, следовательно, в силу (10.8) имеем

$$\varepsilon(0) = 0. \tag{10.9}$$

Теорема 1. *Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только том случае, когда она в этой точке имеет конечную производную.*

▷ 1) Пусть у функции f существует конечная производная $f'(x_0)$, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Это равносильно тому, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \tag{10.10}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\ \Delta x\neq 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ (левая часть формулы (10.10) не определена при $\Delta x = 0$, следовательно, и функция $\varepsilon(\Delta x)$ не определена при $\Delta x = 0$). Поэтому

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Доопределив функцию $\varepsilon(\Delta x)$ нулем в точке $\Delta x = 0$, т. е. положив $\varepsilon(0) = 0$, получим

$$\varepsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

и, следовательно,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{10.11}$$

Это и есть условие (10.3) дифференцируемости функции f в точке x_0, причем

$$f'(x_0) = A. \tag{10.12}$$

2) Пусть теперь, наоборот, функция f дифференцируема в точке x_0, т. е выполняется условие (10.3), или, что то же самое, условия (10.7), (10.8). Тогда при $\Delta x \neq 0$ будем иметь $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$, откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(10.8)}{=} A,$$

т. е. в точке x_0 у функции f существует производная, причем имеет место равенство (10.12). ◁

Замечание 1. Из формул (10.6) и (10.12) следует, что дифференциал dy функции $y = f(x)$ записывается в виде

$$dy = f'(x_0)dx, \tag{10.13}$$

а производная — в виде

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \tag{10.14}$$

Теорема 2. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

$\triangleright$ Если функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. в этой точке выполняется условие (10.7), (10.8), то из него сразу следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

а это и означает непрерывность функции f в точке x_0. $\triangleleft$

Замечание 2. Существуют функции, непрерывные в некоторой

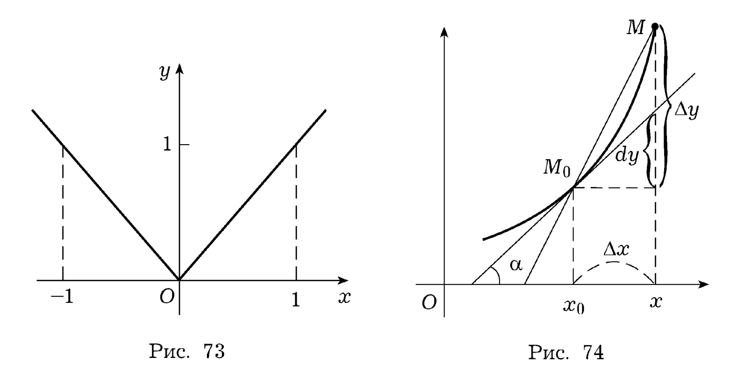


Рис. 73

Рис. 74

точке, но не дифференцируемые. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, ибо в этой точке $\Delta y = |\Delta x|$ (рис. 73), и потому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0$. Однако

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,$$

и, следовательно, предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ не существует.

10.3. Геометрический смысл производной и дифференциала. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, непрерывна в этой точке, $y_0 = f(x_0)$ и $M_0 = (x_0, y_0)$ (рис. 74). Зафиксируем произвольно приращение аргумента Δx, лишь бы $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, и пусть

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad M = (x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки M_0 и M, — она называется *секущей* (графика функции f) — имеет вид

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0. \tag{10.15}$$

Подчеркнем, что здесь Δx фиксировано, а x и y — текущие координаты точек прямой.

Если задано семейство прямых уравнениями

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0, \tag{10.16}$$

где t — параметр (в случае уравнения (10.15) параметром служит Δx), и существуют конечные пределы

$$\lim_{t\to t_0} a(t) = a_0, \quad \lim_{t\to t_0} b(t) = b_0, \quad \lim_{t\to t_0} c(t) = c_0,$$

то говорят, что *прямые* (10.16) *стремятся при $t \to t_0$ к предельному положению* — к прямой, уравнением которой является уравнение

$$a_0x + b_0y + c_0 = 0.$$

Для того чтобы секущая (10.15) при $\Delta x \to 0$ стремилась к предельному положению, отличному от вертикальной прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. чтобы существовала конечная производная. При этом уравнение предельного положения секущей, которое называется *касательной* к графику функции f в точке M_0, имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0. \tag{10.17}$$

Отметим, что из непрерывности функции f в точке x_0 следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, а поскольку $|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, то и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} |M_0M| = 0$, т. е. точка M "стремится к точке M_0" по графику функции f.

Вспомнив геометрический смысл коэффициента при $x - x_0$ в уравнении (10.17), получим

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол наклона касательной к оси Ox (см. рис. 74).

Обозначим ординату касательной через $y_{\text{кас}}$; тогда, положив $x - x_0 = \Delta x$, запишем уравнение касательной (10.17) в виде

$$y_{\text{кас}} - y_0 = f'(x_0)\Delta x.$$

В правой части этого равенства стоит дифференциал dy функции f в точке x_0. Таким образом,

$$dy = y_{\text{кас}} - y_0 \tag{10.18}$$

— дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.

Рассмотрим случай бесконечной производной

$$f'(x_0) = \infty. \tag{10.19}$$

Из уравнения секущей (10.15) имеем

$$\frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, в случае выполнения условия (10.19) получим уравнение предельного положения секущей, т. е. касательной к графику функции f в точке x_0, в виде

$$x = x_0, \tag{10.20}$$

т. е. касательная в этом случае является вертикальной прямой, про-

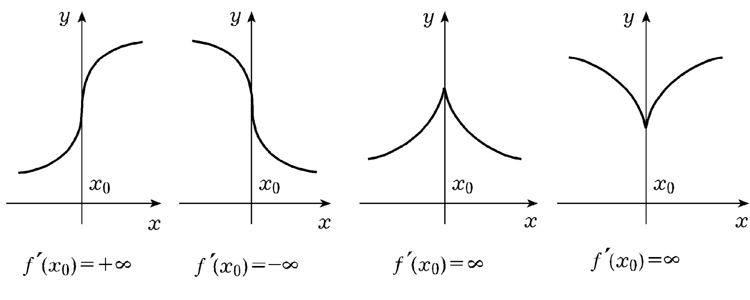


Рис. 75

ходящей через точку x_0 оси абсцисс (рис. 75).

10.4. Физический смысл производной и дифференциала. Пусть значения y функции f и ее аргумент x являются некоторыми физическими величинами, причем аргумент x меняется на некотором промежутке, например на отрезке $[a, b]$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta x = x - x_0$, $x_0 \in [a, b]$, $x \in [a, b]$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, называется *средней скоростью изменения переменной y относительно переменной x на отрезке с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$*, а предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

— *скоростью изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0*. В случае существования этой скорости (т. е. в случае существования производной функции f в точке x_0) приращение Δy переменной y имеет вид

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Это означает, что приращение Δy линейно зависит от приращения Δx переменной x с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Иначе говоря, существование скорости означает, что в малом физический процесс, описываемый функцией f, протекает почти линейно. Этим обстоятельством и объясняется широкое применение дифференциального исчисления при изучении самых разнообразных явлений.

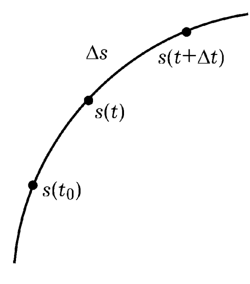


Рис. 76

Примеры. 1. Если $s = s(t)$ — длина пути, проходимого материальной точкой за время t, отсчитываемое от некоторого момента времени t_0, $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ (рис. 76), то $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ называется в физике *величиной средней скорости движения* за промежуток времени Δt, начиная с момента времени t, и обозначается $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Предел же $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = v$ называется *величиной мгновенной скорости движения* в момент времени t. Таким образом, $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Дифференциал $ds = v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если бы движение на этом участке пути было равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s = ds + o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$.

2. Если $q = q(t)$ — количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в момент времени t, то $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ равно количеству электричества, протекающего через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Отношение $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока* за указанный промежуток времени длительностью Δt и обозначается $I_{\text{ср}}$. Предел же $\lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{\text{ср}} = I$ называется *силой тока* в данный момет времени t. Таким образом, $I = \dfrac{dq}{dt}$.

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекло через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент времени t. Как всегда, $\Delta q - dq = o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$.

10.5. Свойства производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

Теорема 3. *Если функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ заданы в окрестности точки $x_0 \in R$, а в самой точке x_0 имеют конечные производные, то функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, $\lambda_1 \in R$, $\lambda_2 \in R$, $f_1(x)f_2(x)$, а в случае $f_2(x_0) \neq 0$ и функции $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ также имеют в точке x_0 конечные про-*

изводные; при этом имеют место формулы

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2', \tag{10.21}$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2', \tag{10.22}$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \tag{10.23}$$

(*в формулах* (10.21)–(10.23) *значения всех функций взяты при* $x = x_0$).

▷ Прежде всего заметим, что в силу условий теоремы в точке x_0 существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'.$$

Докажем теперь последовательно формулы (10.21)–(10.23).

1) Пусть $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; тогда

$$\Delta y = (\lambda_1(y_1 + \Delta y_1) + \lambda_2(y_2 + \Delta y_2)) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \Delta y_1 + \lambda_2 \Delta y_2$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda_1 \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lambda_2 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу (10.21).

2) Пусть $y = y_1 y_2$; тогда

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = y_2 \Delta y_1 + y_1 \Delta y_2 + \Delta y_1 \Delta y_2,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2. \tag{10.24}$$

Заметив, что в силу непрерывности функции f_2 в точке x_0 выполняется условие $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$, и, перейдя в равенстве (10.24) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу (10.22).

3. Пусть $f_2(x_0) \neq 0$ и $y = y_1/y_2$; тогда

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2 \Delta y_1 - y_1 \Delta y_2}{y_2(y_2 + \Delta y_2)},$$

следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 - y_1 \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x}}{y_2(y_2 + \Delta y_2)}.$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу (10.23). ◁

Отметим, что из формулы (10.21) при $y_2 = 0$ (так же, как и из формулы (10.22), когда функция y_2 равна постоянной, а поэтому $y_2' = 0$) следует, что постоянную можно выносить из-под знака дифференцирования, т. е.

$$(\lambda y)' = \lambda y', \quad \lambda \in R.$$

Пример. Вычислим производную функции $\operatorname{tg} x$. Применяя формулу (10.23), получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{10.25}$$

Аналогично вычисляется

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Замечание. Поскольку $dy = y'dx$, то, умножая формулы (10.21)–(10.23) на dx, получим

$$d(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2,$$
$$d(y_1 y_2) = y_2 dy_1 + y_1 dy_2,$$
$$d\,\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}.$$

10.6. Производная обратной функции.

Теорема 4. *Если функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}. \tag{10.26}$$

$\triangleright$ Пусть функция f строго монотонна и непрерывна в окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0; тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на интервале $V = f(U)$ (см. теорему 4 п. 7.3). Поэтому если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, то для функции $y = f(x)$ имеет место $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ и $\Delta y \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$, а для функции $x = f^{-1}(y)$ — соответственно $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ и $\Delta x \neq 0$ при $\Delta y \neq 0$. Заметив это, вычислим производную обратной функции следующим образом:

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \left.\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\right|_{x=x_0}. \quad \triangleleft \tag{10.27}$$

Замечание. Если функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и существует $f'(x_0) = 0$, то обратная функция f^{-1} имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ бесконечную производную $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dx} = \infty$. Это сразу следует из соотношения (10.27).

Примеры. 1. Если

$$y = \arcsin x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad x = \sin y,$$

то

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Если $y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $x = \cos y$, то

$$(\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Если $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $x = \operatorname{tg} y$, то

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Аналогично,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Если $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$, $x = a^y$, то

$$(\log_a x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

в частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

10.7. Производная и дифференциал сложной функции. Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0, а функция $z = g(y)$ — в некоторой окрестности $V = V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причем $f(U) \subset V$ и, следовательно, определена сложная функция

$$F(x) = g(f(x)).$$

Теорема 5. *Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = F(x) = g(f(x))$ также имеет в точке x_0 производную, причем*

$$F'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0), \tag{10.28}$$

или, опуская значение аргумента,

$$z'_x = z'_y y'_x. \tag{10.29}$$

▷ Пусть, как всегда, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и $\Delta z = g(y) - g(y_0)$; тогда в силу дифференцируемости функции g в точке y_0 будем иметь (см. (10.11))

$$\Delta z = g'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{10.30}$$

Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ и, следовательно, в силу теоремы о пределе сложной функции (см. (6.41) в п. 6.13) имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{10.31}$$

Поделив обе части первого равенства (10.30) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{10.32}$$

В силу равенств (10.31) и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ предел правой части равенства (10.32) при $\Delta x \to 0$ существует и равен $g'(y_0)f'(x_0)$, следовательно, существует и предел левой части, т. е. существует

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

причем

$$F'(z_0) = g'(y_0)f'(x_0). \lhd$$

Следствие (инвариантность формы дифференциала).

$$dz = F'(x_0)dx = g'(y_0)dy, \tag{10.33}$$

или, короче,

$$dz = z'_x dx = z'_y dy.$$

Эта формула показывает, что формально записи дифференциала сложной функции посредством независимой переменной x и посредством зависимой переменной y имеют один и тот же вид, но следует иметь в виду, что здесь $dx = \Delta x$ — приращение независимой переменной x, а dy — дифференциал функции $y = f(x)$, т. е. главная линейная часть приращения Δy зависимой переменной ("главная" в том смысле, что разность $\Delta y - dy$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем само Δx).

Докажем формулу (10.33):

$$dz = dF(x_0) \underset{(10.13)}{=} F'(x_0)dx \underset{(10.28)}{=} g'(y_0)f'(x_0)dx \underset{(10.13)}{=} g'(y_0)dy.$$

Пример. Вычислим производную функции $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in R$, с помощью формулы (10.28). Для этого представим функцию $y = x^\alpha$ как композицию функций $y = e^u$ и $u = \alpha \ln x$. Заметив, что $\dfrac{dy}{du} = e^u$, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\alpha}{x}$, получим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^u)'_u u'_x = e^u \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

т. е.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{10.34}$$

10.8. Гиперболические функции и их производные. Нередко в математическом анализе встречаются функции $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Они имеют специальные названия: первая из них называется *гиперболический синус* и обозначается $\operatorname{sh} x$, а вторая — *гиперболический косинус* $\operatorname{ch} x$. Таким образом,

$$\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{10.35}$$

$$\operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{10.36}$$

Эти функции обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных (круговых) синусов и косинусов, например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 - e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1, \tag{10.37}$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\, \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x. \tag{10.38}$$

Слово “гиперболический” в названии функций (10.35) и (10.36) объясняется тем, что уравнения

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad a > 0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

являются, в силу формулы (10.37), параметрическими уравнениями правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, подобно тому, как уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

являются параметрическими уравнениями окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Вычислим производные гиперболических синуса, косинуса:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \tag{10.39}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x. \tag{10.40}$$

10.9. Производные комплекснозначных функций действительного аргумента. Если функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности U точки x_0 числовой оси и принимает, вообще говоря, комплексные значения, т. е. имеет вид

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad u(x) \in R, \quad v(x) \in R, \quad x \in U,$$

то ее производная в точке x_0 определяется равенством

$$f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0) \tag{10.41}$$

(само собой разумеется, что это определение имеет смысл только тогда, когда у функциq $u(x)$ и $v(x)$ существуют производные в точке x_0).

При таком определении операция дифференцирования остается линейной:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2', \quad \lambda_1 \in C, \quad \lambda_2 \in C.$$

Пример. Если $f(x) = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$, то

$$f'(x) \underset{(10.41)}{=} -\alpha\sin\alpha x + i\alpha\cos\alpha x = i\alpha(\cos\alpha x + i\sin\alpha x) = i\alpha f(x).$$

Можно обобщить понятие производной на случай комплекснозначных функций комплексного переменного. Это понятие приводит к большому качественному многообразию новых явлений и потому изучается в отдельном курсе теории функций комплексного переменного.

§ 11. Производные и дифференциалы высших порядков

11.1. Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$ во всех точках некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f'(x)$ в свою очередь имеет в точке x_0 производную $[f'(x)]'\big|_{x=x_0}$, то она называется *второй производной функции f в точке x_0* и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}x_0$. Таким образом, опуская обозначения аргумента, имеем

$$y^{(2)} \equiv y'' \stackrel{\text{def}}{=} (y')'.$$

Аналогично определяются и производные $y^{(n)}$ более высоких порядков n:

$$y^{(n+1)} = [y^{(n)}]', \quad n = 0, 1, ..., \tag{11.1}$$

где для удобства считается, что $y^{(0)} = y$.

Примеры. 1. Если $y = a^x$, $a > 0$, то $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$, вообще, $y^{(n)} = a^x \ln^n a$, $n = 0, 1, 2, ...$ В частности, если $y = e^x$, то

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{11.2}$$

2. Если $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y^{(2)} = -\sin x$, $y^{(3)} = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$. Заметив, что $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$y' = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad y^{(2)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Вообще,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.3}$$

Аналогично,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 0, 1, ... \tag{11.4}$$

Теорема 1. *Если функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ имеют в точке x_0 производные порядка $n \in N$, то любая их линейная комбинация $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, $\lambda_1 \in R$, $\lambda_2 \in R$, и их произведение $y_1 y_2$ имеют в точке x_0 производные порядка n, причем*

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n)} = \lambda_1 y_1^{(n)} + \lambda_2 y_2^{(n)}, \tag{11.5}$$

$$(y_1 y_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)} \equiv (y_1 + y_2)^{\{n\}}, \quad n \in N. \tag{11.6}$$

Все производные в формулах (11.5) и (11.6) берутся в точке x_0, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Символическая запись $(y_1 + y_2)^{\{n\}}$ означает, что это выражение (см. среднюю часть формулы (11.6)) по своей структуре напоминает формулу бинома Ньютона

$$(y_1 + y_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{n-k} y_2^k,$$

только вместо степеней y_1 и y_2 берутся производные соответствующих порядков функций y_1 и y_2. Формула (11.6) называется *формулой Лейбница**).

$\triangleright$ Докажем формулы (11.5) и (11.6) методом математической индукции. В п. 10.5 формула (11.5) была доказана для $n = 1$:

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'. \tag{11.7}$$

Пусть справедлива формула (11.5); покажем, что тогда будет справедлива и аналогичная формула для производной порядка $n+1$:

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n+1)} \underset{(11.1)}{=} [(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{n}]' \underset{(11.5)}{=} (\lambda_1 y_1^{(n)} + \lambda_2 y_2^{(n)})' \underset{(11.7)}{=}$$
$$\underset{(11.7)}{=} \lambda_1 (y_1^{(n)})' + \lambda_2 (y_2^{(n)})' \underset{(11.1)}{=} \lambda_1 y_1^{(n+1)} + \lambda_2 y_2^{(n+1)}.$$

Формула (11.5) доказана; докажем формулу (11.6).

Пусть справедлива формула (11.6) для производной порядка n от произведения функций. Докажем, что тогда будет справедлива и аналогичная формула для производной порядка $n+1$:

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} \underset{(11.1)}{=} ((y_1 y_2)^{(n)})' \underset{(11.6)}{=} \Bigl(\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)}\Bigr)' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}) =$$

*) Г.В. Лейбниц (1646–1716) — немецкий математик, физик, философ.

$$= C_n^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + C_n^1 y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \ldots + C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots + C_n^n y_1^{(1)} y_2^{(n)} +$$
$$+ C_n^0 y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \ldots + C_n^{k-1} y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots + C_n^n y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} =$$
$$= C_n^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + (C_n^1 + C_n^0) y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \ldots$$
$$\ldots + (C_n^k + C_n^{k-1}) y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots + C_n^n y_1^{(0)} y_2^{(n+1)}.$$

Вспомнив, что (см. п. 2.4)

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1,$$

получим

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} = C_{n+1}^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \ldots + C_{n+1}^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n+1}^{n+1} y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)}. \ \triangleleft$$

11.2. Производные высших порядков сложных функций, обратных функций и функций, заданных параметрически. С помощью формулы производной сложной функции (см. п. 10.7) можно вычислять и производные высших порядков сложной функции. Пусть функция $y = y(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, а функция $z = z(y)$ дважды дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$ и имеет смысл сложная функция $z = z(y(x))$. Вычислим вторую производную z''_{xx} сложной функции $z = z(y(x))$ (для простоты записи аргумент писать не будем):

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_y y'_x)'_x = (z'_y)'_x y'_x + z'_y (y'_x)'_x =$$
$$= (z'_y)'_y y'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} {y'_x}^2 + z'_y y''_{xx}. \quad (11.8)$$

Аналогично вычисляются и производные более высоких порядков.

С помощью формул производных обратной функции (см. п. 10.6) и сложной функции (см. п. 10.7) можно вычислять производные высших порядков обратных функций. Вычислим, например, вторую производную. Пусть функция $y = y(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, а в ее окрестности непрерывна и строго монотонна, причем $y'(x_0) \neq 0$. Тогда для второй производной x''_{yy} имеем в точке $y_0 = y(x_0)$

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{{y'_x}^2} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{{y'_x}^3}.$$

Рассмотрим теперь параметрическое задание функций. Пусть на некотором множестве E задана пара функций

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (11.9)$$

причем одна из них, например, $x = x(t)$, строго монотонна на этом множестве и, следовательно, существует обратная функция $t = t(x)$,

для которой E является множеством значений. Тогда функция $y = y(t(x))$ называется ***параметрически заданной функцией*** (уравнениями (11.9)). Она определена на множестве значений функции $x(t)$.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна в окрестности этой точки и $x'(t_0) \neq 0$, то функция $y(t(x))$ дифференцируема в точке $x_0 = x(t_0)$, причем

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \tag{11.10}$$

ибо $t'_x = 1/x'_t$.

Аналогично вычисляются и производные высших порядков. Например, если функции (11.9) дважды дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x \underset{(11.10)}{=} \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Выведенные здесь формулы не предназначены для запоминания. Достаточно усвоить метод их получения.

11.3. Дифференциалы высших порядков. Дифференциал от дифференциала первого порядка

$$dy = f'(x)dx \tag{11.11}$$

функции $y = f(x)$, рассматриваемого только как функция переменной x (т. е. приращение dx аргумента x предполагается постоянным), при условии, что повторное приращение независимой переменной x совпадает с первоначальным, называется ***вторым дифференциалом*** $d^2 f(x)$ ***функции*** f ***в данной точке*** x. Таким образом,

$$d^2 f(x) \overset{\text{def}}{=} d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx\,dx.$$

Вместо $dx\,dx$ пишут dx^2:

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2,$$

или

$$d^2 y = y''dx^2, \tag{11.12}$$

откуда $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично, ***дифференциалом*** n***-го порядка***, $n = 2, 3, ...$, называется дифференциал от дифференциала порядка $n-1$ при условии, что в дифференциалах все время берутся одни и те же приращения dx независимой переменной x:

$$d^n y \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1}y). \tag{11.13}$$

При этом оказывается справедливой формула

$$d^n y = y^{(n)} dx^n, \tag{11.14}$$

где $dx^n = (dx)^n$.

Формула (11.14) легко доказывается по индукции: при $n = 1$ она доказана; если она доказана при некотором n, то

$$d^{n+1} y \underset{(11.13)}{\overset{\text{def}}{=}} d(d^n y) = d(y^{(n)} dx^n) = d(y^{(n)}) dx^n \underset{(11.11)}{=} y^{(n+1)} dx^{n+1}.$$

Из формулы (11.14) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{11.15}$$

В силу формулы (11.14) высказывания "функция имеет в точке n производных" и "функция n раз дифференцируема в этой точке" (т. е. у нее существует дифференциал порядка n) равносильны.

Дифференциалы высших порядков $d^n y$, $n \geqslant 2$, не обладают свойством инвариантности формы относительно выбора переменных: если, например, $z = z(y)$, $y = y(x)$ — дважды дифференцируемые функции и имеет смысл композиция $z(y(x))$, то

$$\begin{gathered} dz = z'_y dy, \\ d^2 z = d(dz) = d(z'_y dy) = dz'_y dy + z'_y d(dy) = z''_{yy} dy^2 + z'_y d^2 y, \end{gathered} \tag{11.16}$$

где, вообще говоря, $d^2 y \neq 0$. Заметим, что если обе части формулы (11.16) поделить на dx, то в силу (11.15) получится формула (11.8).

§ 12. Дифференциальные теоремы о среднем

12.1. Теорема Ферма*). Пусть функция f задана на множестве X и $x_0 \in X$. Напомним, что если для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$), то говорят, что функция f принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение на множестве X (см. п. 3.1).

Если в неравенстве $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно в неравенстве $f(x) \geqslant f(x_0)$) заменить при $x \neq x_0$ знак нестрогого неравенства на знак строгого неравенства, то получится определение точки x_0, в которой функция f принимает строго наибольшее (строго наименьшее) значение на множестве X.

Теорема 1 (Ферма). *Если функция определена в некоторой окрестности точки, принимает в этой точке наибольшее* (*наименьшее*) *значение и имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то эта производная равна нулю.*

---

*) П. Ферма (1601–1665) — французский математик.

▷ Пусть функция f определена на окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и принимает в этой точке, например, наибольшее значение, т. е. для любой точки $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда если $x < x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \tag{12.1}$$

а если $x > x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \tag{12.2}$$

По условию теоремы существует конечный или определенного знака бесконечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, поэтому в неравенствах (12.1) и (12.2) можно перейти к пределу при $x \to x_0$ (см. свойство 4° пределов функций в п. 6.7). В результате получим соответственно $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. ◁

Замечание 1. Формулировка теоремы Ферма на первый взгляд может показаться неестественной: в предположениях говорится о бесконечных производных, а в утверждении — о равенстве нулю производной. Однако на самом деле формулировка теоремы вполне корректна: *a priori* предполагается, что в точке существует производная (конечная или определенного знака бесконечная), и доказывается, что при выполнении дополнительного условия о достижении в рассматриваемой точке наибольшего или наименьшего значения указанная производная равна нулю. Иначе говоря, доказывается, что в точке, в которой принимается наибольшее в некоторой ее окрестности значение функции, не может существовать ни конечная, не равная нулю производная функции, ни определенного знака бесконечная производная. Поэтому в точке, в которой достигается наибольшее или наименьшее в ее окрестности значение функции, возможны следующие случаи: в этой точке существует конечная равная нулю производная; существует знаконеопределенная бесконечная производная; не существует никакой производной (ни конечной, ни бесконечной). Примером функции, для которой осуществляется первый случай, является функция $f_1(x) = x^2$; второй случай: $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2}$; третий: $f_3(x) = |x|$

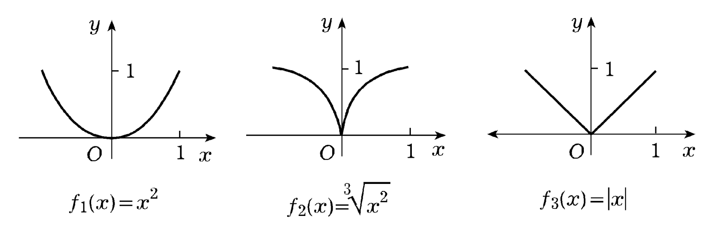


Рис. 77

(рис. 77). Все эти функции принимают при $x = 0$ наименьшее значе-

ние, $f_1'(0) = 0$, $f_2'(0) = \infty$, а производная (конечная или бесконечная) функции f_3 в точке $x = 0$ не существует.

Замечание 2. В теореме Ферма существенно, что точка, в которой достигается экстремальное значение, является внутренней для рассматриваемого промежутка. Так, например, функция $f(x) = x$, рассматриваемая только на отрезке $[0, 1]$, принимает наибольшее и наименьшее значения на его концах, а производная в них не обращается в нуль.

12.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях.

Теорема 2 (Ролль*)). *Если функция* f:

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *имеет в каждой точке интервала* (a, b) *конечную или определенного знака бесконечную производную*;

3) *принимает равные значения на концах отрезка* $[a, b]$, *т. е.*

$$f(a) = f(b); \qquad (12.3)$$

то существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, *что*

$$f'(\xi) = 0. \qquad (12.4)$$

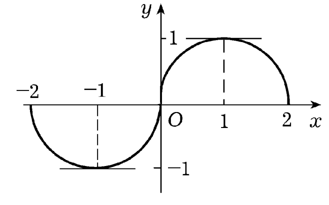


Рис. 78

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что на графике функции, удовлетворяющей условиям теоремы Ролля, имеется по крайней мере одна точка, в которой касательная горизонтальна (рис. 78).

▷ Если для любой точки x интервала (a, b) выполняется равенство $f(x) = f(a) = f(b)$, то функция f является постоянной на этом интервале, и потому для любой точки $\xi \in (a, b)$ выполняется условие (12.4).

Пусть существует точка $x_0 \in (a, b)$, для которой $f(x_0) \neq f(a)$, например $f(x_0) > f(a)$. Согласно теореме Вейерштрасса о достижимости непрерывной на отрезке функцией своих наибольшего и наименьшего значений (см. теорему 1 в п. 7.1), существует такая точка $\xi \in [a, b]$, в которой функция f принимает наибольшее значение. Тогда

$$f(\xi) \geqslant f(x_0) > f(a) = f(b).$$

Поэтому $\xi \neq a$ и $\xi \neq b$, т. е. точка ξ принадлежит интервалу (a, b) и функция f принимает в ней наибольшее значение. Следовательно, согласно теореме Ферма (см. теорему 1 в п. 12.1), выполняется равенство $f'(\xi) = 0$. ◁

*) М. Ролль (1652–1719) — французский математик.

Замечание 3. Все условия теоремы Ролля существенны. На

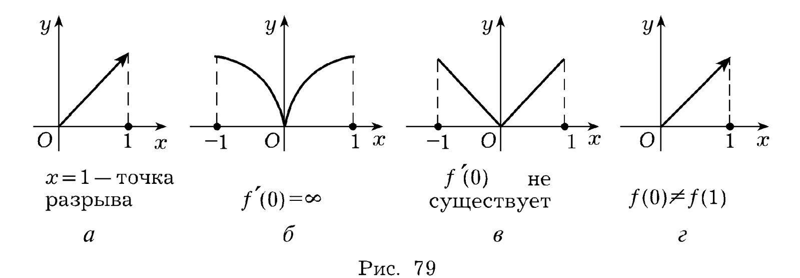


Рис. 79

рис. 79 изображены графики четырех функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$; у каждой из ниех не выполняется лишь одно из трех условий теоремы Ролля и не существует такой точки ξ, что $f'(\xi) = 0$. Пример функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (см. рис. 79, *б*) показывает также, что условие существования определенного знака бесконечной производной нельзя заменить условием существования просто бесконечной производной. У функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0$ производная равна бесконечности, но без определенного знака, т. е. $f'(0) = \infty$, и не существует такой точки ξ, что $f'(\xi) = 0$.

Примером функции, удовлетворяющей условиям теоремы Ролля и имеющей в некоторой точке определенного знака бесконечную производную, является функция

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ -\sqrt{1-(x+1)^2}, & -2 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[-2, 2]$, дифференцируема во всех точках интервала $(-2, 2)$, кроме точки $x = 0$, в которой $f'(0) = +\infty$, и $f(-2) = f(2)$ (см. рис. 78). В согласии с теоремой Ролля у нее имеются точки, в которых производная равна нулю: ими являются точки $x = \pm 1$. Графиком этой функции являются две полуокружности радиуса единица, сопряженные в точке $(0, 0)$.

Замечание 4. В дальнейшем нам понадобится следующее свойство бесконечных производных. Если функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ определены в окрестности точки x_0, функция f_1 имеет в точке x_0 бесконечную производную (определенного знака или нет), а функция f_2 имеет в точке x_0 конечную производную, то функция $y = f_1(x) + f_2(x)$ имеет в точке x_0 такую же бесконечную производную, как и функция f_1. Для того чтобы в этом убедиться, надо перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Теорема 3 (Лагранж*)). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{12.5}$$

Это равенство называется *формулой конечных приращений Лагранжа.*

▷ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda x, \tag{12.6}$$

где λ — некоторое число. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет конечную или определенного знака бесконечную производную (см. замечание 4). Подберем число λ так, чтобы выполнялось соотношение

$$F(a) = F(b); \tag{12.7}$$

тогда функция F будет удовлетворять всем условиям теоремы Ролля.

Из условий (12.6) и (12.7) имеем равенство $f(a) - \lambda(a) = f(b) - \lambda b$, откуда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{12.8}$$

При этом λ, согласно теореме Ролля, существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$F'(\xi) = 0, \tag{12.9}$$

и так как из (12.6) следует, что $F'(x) = f'(x) - \lambda$, то из (12.8) и (12.9) получаем

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

что равносильно равенству (12.5). ◁

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что на дуге $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 80) графика функции f с концами в точках $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$ найдется точка $M = (\xi, f(\xi))$, касательная в которой параллельна хорде AB. Действительно, согласно теореме Лагранжа

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \tag{12.10}$$

где $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — тангенс угла наклона хорды AB, а $f'(\xi)$ — тангенс угла наклона касательной к дуге $\overset{\frown}{AB}$ в точке $M = (\xi, f(\xi))$, $\xi \in (a, b)$.

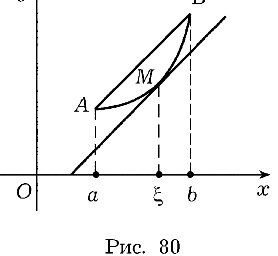


Рис. 80

*) Ж. Л. Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик.

Если положить $\theta \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\xi - a}{b - a}$, $a < \xi < b$, то, очевидно, $0 < \theta < 1$ и $\xi = a + \theta(b - a)$. Поэтому формулу Лагранжа можно также записать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1,$$

или, полагая $b - a = \Delta x$, $a = x$ и, следовательно, $b = x + \Delta x$, в виде

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x. \tag{12.11}$$

Заметим, что равенство (12.10) остается верным и при $b < a$ (а поэтому и равенство (12.11) при $\Delta x < 0$), так как при перемене местами a и b его левая часть не меняет знака, причем в этом случае также $\xi = a + \theta(b - a)$, $0 < \theta < 1$ (здесь $b - a < 0$, $\xi - a < 0$).

Следствие 1. *Если фукция непрерывна и имеет производную, равную нулю, во всех точках некоторого промежутка (конечного или бесконечного), то она на нем постоянна.*

▷ Действительно, пусть функция f удовлетворяет сформулированным условиям на некотором промежутке и x_1, x_2 — две произвольные его точки, $x_1 < x_2$. Тогда функция f непрерывна и дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$ (на концах этого отрезка в смысле соответственно односторонней непрерывности и односторонних производных). По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2. \tag{12.12}$$

Во всех точках промежутка, на котором рассматривается функция f, по условию $f'(x) = 0$, в частности $f'(\xi) = 0$. Поэтому из равенства (12.12) следует, что $f(x_1) = f(x_2)$.

Поскольку x_1 и x_2 — произвольные точки указанного промежутка, то это и означает, что функция f на нем постоянна. ◁

Следствие 2. *Если функция f непрерывна в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in \overset{\circ}{U}(x_0)} f'(x),$$

то существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$ и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \in \overset{\circ}{U}(x_0)} f'(x).$$

В частности, производная не может иметь устранимую точку разрыва.

▷ В самом деле, согласно теореме Лагранжа для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ справедливо равенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi), \tag{12.13}$$

где $\xi = \xi(x)$ лежит между точками x_0 и x, и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} \xi(x) = x_0$, а потому

$$\lim_{x\to x_0,\, x\in \overset{\circ}{U}(x_0)} f'(\xi) = \lim_{x\to x_0,\, x\in \overset{\circ}{U}(x_0)} f'(x). \tag{12.14}$$

Из этого равенства следует, что левая часть равенства (12.13) имеет конечный или бесконечный предел, т. е. существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$, причем

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0,\, x\in \overset{\circ}{U}(x_0)} f'(x). \ \triangleleft$$

Утверждение, аналогичное следствию 2, имеет место и для односторонних производных.

Замечание 5. Из следствия 2 вытекает, что если функция f непрерывна на некотором промежутке (конечном или бесконечном) и имеет производную, равную нулю во всех точках этого промежутка, кроме, быть может, конечного множества его точек, то функция f постоянна на указанном промежутке.

Действительно, в этом случае в достаточно малых проколотых окрестностях точек рассматриваемого конечного множества производная функции равна нулю и, следовательно, имеет в этих точках предел, равный нулю по проколотым окрестностям. Согласно следствию 2 в указанных точках также существует производная и она равна нулю. Поэтому в силу следствия 1 функция является постоянной.

Теорема 4 (Коши). *Если функции f и g:*

1) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$;

2) *дифференцируемы в каждой точке интервала* (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ *во всех точках* $x \in (a, b)$;

то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, *что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{12.15}$$

$\triangleright$ Прежде всего заметим, что для функции g справедливо неравенство

$$g(a) \neq g(b), \tag{12.16}$$

так как если бы имело место равенство $g(a) = g(b)$, то в силу теоремы Ролля нашлась бы такая точка $x_0 \in (a, b)$, что $g'(x_0) = 0$, а это противоречило бы условиям теоремы. В силу неравенства (12.16) левая часть формулы (12.15) имеет смысл.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \tag{12.17}$$

где число λ подберем таким образом, чтобы имело место равенство

$$F(a) = F(b). \tag{12.18}$$

Тогда функция F будет удовлетворять на отрезке $[a, b]$ условиям теоремы Ролля. Из соотношений (12.17) и (12.18) имеем

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$

откуда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{12.19}$$

При таком выборе числа λ существует $\xi \in (a, b)$, для которого $F'(\xi) = 0$, но $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, следовательно,

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0,$$

и поэтому

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{12.20}$$

Из (12.19) и (12.20) следует (12.15). ◁

§ 13. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

13.1. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 1. *Если функции f и g определены в окрестности точки x_0,*

$$f(x_0) = g(x_0) = 0, \tag{13.1}$$

существуют конечные производные $g'(x_0) \neq 0$ и $f'(x_0)$, то существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{13.2}$$

▷ Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{(13.1)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \ ◁$$

Геометрический смысл равенства (13.2) состоит в том, что предел отношения ординат графиков функций f и g равен пределу отношения ординат их касательных $y = f'(x_0)(x - x_0)$ и $y = g'(x_0)(x - x_0)$, которое постоянно и равно $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (рис. 81).

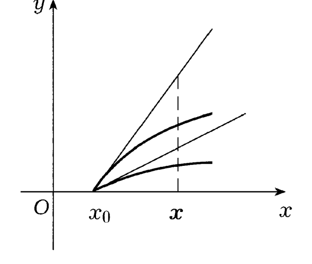


Рис. 81

Теорема 2. *Если*:

1) *функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b)*;

2) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

4) *существует конечный или бесконеч-*

ный предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; *то существует и предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.3}$$

▷ Доопределим функции f и g в точке $x=a$ по непрерывности, т. е. положим

$$f(a)=g(a)=0. \tag{13.4}$$

Тогда для любого $x\in(a,b)$ продолженные функции на отрезке $[a,x]$ будут удовлетворять условиям теоремы Коши о среднем значении, и потому будет существовать такая точка $\xi=\xi(x)$, $a<\xi<x$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{(13.4)}{=}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{13.5}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a}\xi(x)=a$ и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.6}$$

и, следовательно, существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{(13.5)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\underset{(13.6)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \triangleleft$$

13.2. Неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3. *Если*:

1) *функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b)*;
2) $g'(x)\neq 0$ *для всех* $x\in(a,b)$;
3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$; (13.7)
4) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

то существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.8}$$

▷ Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k. \tag{13.9}$$

Покажем, что при выполнении остальных условий теоремы

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k. \tag{13.10}$$

Если $a < x < x_0 < b$, то на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши (см. теорему 4 в п. 12.2), а поэтому существует такая точка $\xi = \xi(x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < x_0. \tag{13.11}$$

Далее, в силу (13.7) существует такая точка $x_1 = x_1(x_0)$, $a < x_1 < < x_0$, что при всех $x \in (a, x_1)$ выполняются неравенства

$$f(x) \neq 0,$$
$$g(x) \neq 0,$$
$$f(x) \neq f(x_0),$$

и, следовательно, можно производить деление на $f(x)$, $g(x)$ и $1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}$ $\Big($а также и на $1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}$, поскольку в силу условий теоремы $g(x) \neq \neq g(x_0)$; см. (12.16) в доказательстве теоремы 4 из п. 12.2$\Big)$. Для этих значений x из (13.11) вытекает равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{13.12}$$

В правой части равенства первый сомножитель $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ стремится к числу k при $x_0 \to a$ (ибо $a < \xi < x_0$, и поэтому $\lim\limits_{x_0 \to a} \xi = a$), а второй в силу условия (13.7) стремится к 1 при $x \to a$ и фиксированном x_0:

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1. \tag{13.13}$$

Непосредственно перейти к пределу в равенстве (13.12) нельзя, так как указанные выше предельные переходы в сомножителях в правой части равенства происходят при разных условиях: при $x_0 \to a$ и при фиксированном x_0, но $x \to a$. Однако если задать произвольно окрестность $U(k)$ предела k отношения производных (13.9), то можно сначала зафиксировать точку x_0 столь близко к точке a, что отношение $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ попадет в эту окрестность, ибо $a < \xi < x_0$. Согласно же

условию (13.13) для всех точек x, достаточно близких к a, отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ (см. (13.12)) также будет принадлежать указанной окрестности $U(k)$, а это означает справедливость утверждения (13.10).

Проведенное рассуждение нетрудно записать с помощью неравенств.

Пусть сначала предел (13.9) конечный. Положим

$$\alpha(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} - k. \tag{13.14}$$

Тогда из (13.9) будем иметь $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, и, следовательно, для любого произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое x_0, что для всех $x \in (a, x_0)$ выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.15}$$

Если положить еще

$$\beta(x) = 1 - \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}, \tag{13.16}$$

то в силу условия (13.7)

$$\lim_{x\to a} \beta(x) = 0. \tag{13.17}$$

Теперь имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{(13.12)\\(13.14),\,(13.16)}}{=} (k + \alpha(\xi))(1 + \beta(x)) = \\ = k + \alpha(\xi) + k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x), \tag{13.18}$$

$x < \xi < x_0$; при этом в силу (13.17) существует такое $\delta > 0$, $a < a + \delta < < x_0$, что при $x \in (a, a + \delta)$ выполняется неравенство

$$|k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.19}$$

В результате получаем, что для всех $x \in (a, a + \delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| \underset{(13.18)}{\leqslant} |\alpha(\xi)| + |k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x)| \underset{\substack{(13.15)\\(13.19)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (13.10).

Если теперь

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty, \tag{13.20}$$

то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=0$, откуда по уже доказанному $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$, и потому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty. \tag{13.21}$$

Из (13.20) и (13.21) следует, что (13.8) справедливо и в этом случае.

Аналогично рассматривается и случай бесконечного предела со знаком. Более того, можно показать, что в условиях теоремы бесконечный предел (13.9) всегда является бесконечностью со знаком. ◁

В теоремах 2 и 3 был рассмотрен случай, когда аргумент стремился к числу a справа. К этому случаю сводятся случаи, когда аргумент x стремится к числу a слева или произвольным образом, а также случаи, когда a является одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Во всех этих случаях при соответствующих предположениях имеет место формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.22}$$

Рассмотрим, например, случай стремления аргумента к $+\infty$ для функций f и g, заданных на полуинтервале вида $[c,+\infty)$, где c — некоторое число. Этот случай сводится к случаю, рассмотренному в теореме 3 с помощью замены переменного $x=1/t$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{x=1/t}{=}\lim_{t\to+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}\underset{(13.7)}{=}\lim_{t\to+0}\frac{\dfrac{d}{dt}f(1/t)}{\dfrac{d}{dt}g(1/t)}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}\underset{t=1/x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(здесь штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу x).

Правило вычисления предела отношений функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ по формуле (13.22) называется *правилом Лопиталя* *).

Примеры. 1. Если $\alpha>0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0, \tag{13.23}$$

т. е. любая положительная степень x возрастает быстрее $\ln x$ при $x\to+\infty$. Действительно, применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0.$$

---

*) Г. Лопиталь (1661–1704) — французский математик.

2. Если $\alpha > 0$ и $a > 1$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \tag{13.24}$$

т. е. при $x \to +\infty$ любая степень x^α, $\alpha > 0$, растет медленнее показательной функции с основанием, большим единицы. В самом деле, сделав указанные ниже преобразования и применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{a^{x/a}}\right)^\alpha = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^{x/\alpha}}\right)^\alpha =$$
$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} a^{x/\alpha} \ln a}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\ln a}\right)^\alpha \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} a^x} = 0.$$

3. Найдем $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$. Здесь отношение производных числителя и знаменателя

$$\frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$ и, следовательно, правило Лопиталя неприменимо. В этом случае предел находится непосредственно:

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x\to0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Из этого примера следует, что предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{13.25}$$

может существовать в случае, когда предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.26}$$

не существует, и, тем самым, здесь для нахождения предела (13.25) правило Лопиталя (13.22) неприменимо.

4. Предел неопределенностей типа 0^0, ∞^0 или 1^∞ можно найти, предварительно прологарифмировав функции, предел которых ищется. Например, чтобы найти предел $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, найдем сначала предел

$$\lim_{x\to+0} \ln x^x = \lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x} \underset{(13.8)}{=} -\lim_{x\to0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности показательной функции будем иметь

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

В частности, при $x = \frac{1}{n}$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}} = 1.$$

5. Пределы неопределенностей типов $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ целесообразно привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Например,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x + x\cos x}{\sin x}\,\frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}\right).$$

Предел первого сомножителя в правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{\sin x}\cos x\right) = 2,$$

а предел второго — с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \frac{2}{3}$.

§ 14. Формула Тейлора

14.1. Вывод формулы Тейлора. Рассмотрим следующую задачу. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n включительно. Требуется найти такой многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем n, что

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, ..., n, \tag{14.1}$$

$$r_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{14.2}$$

В случае $n = 1$ нам уже известно, что эта задача имеет решение и что ее решением является многочлен

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{14.3}$$

так как

$$P_1(x_0) = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = f'(x_0),$$
$$r_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= \Delta y - f'(x_0)\Delta x = \Delta y - dy = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

где, как обычно, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

По аналогии с формулой (14.3) будем искать многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (14.1) и (14.2), в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n. \tag{14.4}$$

Положив $x = x_0$, в силу условия (14.1) при $k = 0$ получим

$$a_0 = f(x_0). \tag{14.5}$$

Дифференцируя равенство (14.4), будем иметь

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Положив здесь $x = x_0$, в силу условия (14.1) при $k = 1$ получим

$$a_1 = f'(x_0). \tag{14.6}$$

Вообще, продифференцировав равенство (14.4) k раз:

$$P_n^{(k)}(x) = k!\, a_k + (k+1) ... 2a_{k+1}(x - x_0) + ... \\ ... + n(n-1) ... (n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k},$$

и положив $x = x_0$, в силу условия (14.1) получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, ..., n. \tag{14.7}$$

Таким образом, если коэффициенты многочлена (14.4) выбраны согласно формулам (14.7), то этот многочлен удовлетворяет условию (14.1). Покажем, что он удовлетворяет и условию (14.2). Для этого прежде всего отметим, что в силу условий (14.1) для функции

$$r_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x) \tag{14.8}$$

имеет место

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = ... = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{14.9}$$

Из того, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n, вытекает, что у нее в некоторой окрестности этой точки существуют производные до порядка $n - 1$ включительно и все производные функции $f(x)$, а следовательно, в силу равенства (14.8) и производные функции $r_n(x)$, до порядка $n - 1$ включительно непрерывны в указанной точке x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} r_n^{(k)}(x) = r^{(k)}(x_0) \underset{(14.9)}{=} 0, \quad k = 0, 1, ..., n - 1.$$

Для вычисления предела $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$ применим сначала $n - 1$ раз правило Лопиталя — теорему 2 из п. 13.1, а затем оттуда же

теорему 1:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \underset{(13.3)}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \underset{(13.3)}{=} \ldots \underset{(13.3)}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} \underset{(13.2)}{=} \underset{(13.2)}{=} \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Это и означает выполнение условия (14.2). Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Если функция f n раз дифференцируема в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0. \tag{14.10}$$

Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{14.11}$$

называется *многочленом Тейлора**) (*порядка* n), формула (14.10) — *формулой Тейлора* (*порядка* n) для функции f в точке $x = x_0$, а функция

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{14.12}$$

— *остаточным членом* (*порядка* n) формулы Тейлора, а его представление в виде (14.2), т. е.

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0,$$

— записью остаточного члена в *виде Пеано***).

Частный случай формулы Тейлора (14.10) при $x_0 = 0$ называется *формулой Маклорена****)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x), \tag{14.13}$$

где, согласно (14.2), остаточный член $r_n(x)$ можно записать в виде

$$r_n(x) = o(x^n), \quad x\to 0. \tag{14.14}$$

Из нижеследующей теоремы будет следовать, что многочлен Тейлора единствен в своем роде. Именно, никакой другой многочлен не

*) Б. Тейлор (1685–1731) — английский математик.

**) Д. Пеано (1858–1932) — итальянский математик.

***) К. Маклорен (1698–1746) — шотландский математик.

приближает функцию, заданную в окрестности точки x_0 с точностью до бесконечно малых того же порядка относительно $x - x_0$, $x \to x_0$, что и многочлен Тейлора.

Предварительно отметим, что любой многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_x x^k$ степени n для любого x_0 может быть записан в виде $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k$. Действительно, положив $h = x - x_0$, использовав формулу бинома Ньютона и собрав члены с одинаковыми степенями h, получим

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x_0 + h)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k,$$

где b_k — некоторые постоянные.

Теорема 2. *Если функция f задана в окрестности точки x_0 и имеет представление*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{14.15}$$

то такое представление единственно.

▷ Пусть наряду с представлением (14.15) имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{14.16}$$

Тогда, положив

$$c_k = b_k - a_k, \quad k = 0, 1, ..., n, \tag{14.17}$$

и вычтя из равенства (14.16) равенство (14.15), получим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) = 0, \quad x \to x_0. \tag{14.18}$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получим $c_0 = 0$.

Заметим, что $o((x - x_0)^m) = \varepsilon(x)(x - x_0)^m$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, и, следовательно, при $x \neq x_0$, $m = 1, 2, ...$

$$\frac{o((x - x_0)^m)}{x - x_0} = \varepsilon(x)(x - x_0)^{m-1} = o((x - x_0)^{m-1}), \quad x \to x_0.$$

Сократив на $x - x_0$, $x \neq x_0$, левую часть равенства (14.18) (в нем, как уже доказано, $c_0 = 0$), получим

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}) = 0, \quad x \to x_0.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, $x \neq x_0$, получим $c_1 = 0$. Продолжая этот процесс после m-го шага, $0 \leqslant m \leqslant n$, получим

$$\sum_{k=m}^{n} c_k (x - x_0)^{k-m} + o((x - x_0)^{n-m}) = 0, \quad x \to x_0,$$

отсюда при $x \to x_0$ следует, что $c_m = 0$, $m = 0, 1, ..., n$.

Таким образом, в силу равенств (14.17)

$$a_k = b_k, \quad k = 0, 1, ..., n. \quad \triangleleft$$

Теорема 2 называется обычно *теоремой единственности.* Из нее следует, что если для n раз дифференцируемой в точке функции f получено представление ее в виде (14.15), то это представление является ее разложением по формуле Тейлора. В самом деле, при сделанных предположениях, согласно теореме 1, такое представление существует, а другого в силу теоремы 2 нет.

14.2. Примеры разложения по формуле Тейлора.

Примеры. 1. Напишем формулу Маклорена для функции $f(x) = \sin x$.

Так как $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$ (см. п. 11.1), то

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если} \quad n = 2k+1, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \qquad (14.19)$$

2. Для функции $f(x) = \cos x$ имеем аналогично

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0. \qquad (14.20)$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.

Так как $(e^x)^{(n)} = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1$ и, следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0. \qquad (14.21)$$

Отсюда следует, что

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + ...(-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0. \qquad (14.22)$$

Складывая и вычитая соотношения (14.21) и (14.22), после умножения результата на 1/2 получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0, \qquad (14.23)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \qquad (14.24)$$

В силу теоремы единственности (см. теорему 2 в п. 14.1) полученные разложения являются разложениями функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ по формуле Тейлора.

4. Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in R$, $\alpha \notin N$, то

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Поэтому

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad f(0) = 1;$$

отсюда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0. \qquad (14.25)$$

Если $\alpha = m$ — натуральное число, то при $n \geqslant m$ будем иметь $(1+x)^m = P_m(x) + 0$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m. Отсюда, согласно теореме единственности, следует, что $P_m(x)$ является многочленом Тейлора, и, следовательно, в силу (14.25)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots + x^m,$$

т. е. в этом случае формула (14.25) превращается в формулу бинома Ньютона.

5. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$; тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

вообще, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, поэтому

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и так как $f(0) = 0$, то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0. \qquad (14.26)$$

Замечание. Отметим, что

$$ax^n + o(x^n) = O(x^n), \quad x \to 0. \tag{14.27}$$

Действительно, $o(x^n) = \varepsilon(x)x^n$, где $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что при $|x| < \delta$ имеем $|\varepsilon(x)| \leqslant 1$ и, следовательно,

$$|ax^n + o(x^n)| = |ax^n + \varepsilon(x)x^n| \leqslant (|a| + 1)|x^n|.$$

Это и означает, что выполняется равенство (14.27).

Если в формуле Маклорена (14.13), (14.14) заменить n на $n+1$ (в предположении, конечно, существовании производной порядка $n+1$ при $x = 0$) и воспользоваться равенством (14.27), то получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + O(x^{n+1}), \quad x \to 0.$$

Получившаяся оценка остатка $r_n(x) = O(x^{n+1})$ является, очевидно, более сильной, чем его оценка в формуле (14.13), где

$$r_n(x) = o(x^n), \quad x \to 0.$$

Поэтому формула Тейлора для $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $(1+x)^\alpha$ и $\ln(1+x)$ можно при $x \to 0$ записать в виде

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

14.3*. Применение метода выделения главной части функций для вычисления пределов. Пусть функция f представлена в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора в виде

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Многочлен Тейлора $P(x)$ (если он не тождественный нуль) называют *главной частью функции f в рассматриваемой окрестности.* Ее выделение полезно применять для нахождения пределов функций. Покажем на примерах, как это делается.

Примеры. 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Представим $\sin x$, согласно формуле Тейлора, в виде

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

В соответствии с теоремой 1 п. 9.3

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^3}{6}, \quad x \to 0.$$

Поэтому, применив теорему 2 п. 9.3, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Имеем

$$x\cos x = x(1 + o(x)) = x + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Поэтому, согласно теоремам 1 и 2 из п. 9.3, с помощью этих соотношений будем иметь

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + o(x^2) - \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -1.$$

Мы воспользовались здесь тем, что

$$\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{2}x^2, \quad x \to 0.$$

3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Заметив, что $(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\operatorname{ctg}^2 x \ln\cos x}$, найдем предел натурального логарифма функции, стоящей под знаком предела, т. е. предел

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}^2 x \ln\cos x).$$

Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Поэтому

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Далее,

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{(1+o(x))^2}{(x+o(x))^2} = \frac{1+o(x)}{x^2+o(x^2)}, \quad x \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}^2 x \ln\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{(1+o(x))\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Тем самым найден и искомый предел:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

§ 15. Исследование функций

15.1. Признак монотонности функций.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале функция возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была во всех точках интервала неотрицательна (неположительна).*

Если производная функция во всех точках интервала положительна (отрицательна), то функция строго возрастает (строго убывает).

$\triangleright$ Докажем, например, что если на интервале (a, b) производная функции f неотрицательна ($f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$), то функция f возрастает на (a, b). Действительно, если $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$, то по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2, \tag{15.1}$$

а так как по условию $f'(\xi) \geqslant 0$, то из равенства (15.1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, т. е.

$$f(x_1) \leqslant f(x_2). \tag{15.2}$$

При этом если для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и, следовательно, в равенстве (15.1) $f'(\xi) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е.

$$f(x_1) < f(x_2) \tag{15.3}$$

— функция f строго возрастает.

Пусть теперь функция f возрастает на интервале (a, b) и имеет в точке $x_0 \in (a, b)$ производную. Возьмем $\Delta x > 0$, тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \geqslant f(x_0)$$

и, следовательно,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0. \tag{15.4}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x_0) \geqslant 0. \tag{15.5}$$

Аналогично теорема 1 доказывается для убывающих функций. ◁

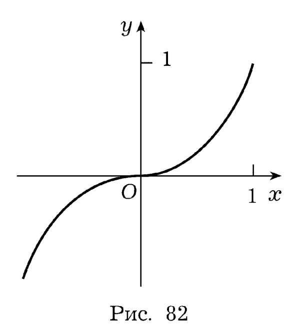


Рис. 82

З а м е ч а н и е 1. Как было показано, условие положительности производной на интервале является достаточным условием строгого возрастания. Отметим, что это условие не является, однако, необходимым условием строгого возрастания. Действительно, например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси, однако ее производная $f'(x) = 3x^2$ не всюду положительна — она обращается в нуль при $x = 0$ (рис. 82).

15.2. Локальные экстремумы функций. Пусть функция f задана на некотором множестве $X \subset R$ и $x_0 \in X$.

О п р е д е л е н и е 1. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad (\text{соответственно} \quad f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Если для всех $x \in X \cap U(x_0)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*).

В дальнейшем для простоты точки (строгого) локального максимума и минимума функции будем кратко называть ее точками (строгого) максимума и минимума.

Точки максимума и минимума (строгого) функции называют *ее точками экстремума* (*строгого*).

Из теоремы Ферма (см. п. 12.1) для функций, определенных в некоторой окрестности точки, сразу следует необходимое условие локального экстремума в этом точке.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). *Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.*

▷ Действительно, из того, что у функции в точке существует производная, следует, что функция определена в некоторой окрестности этой точки, а так как эта точка является точкой локального экстремума, то ее окрестность можно выбрать так, что сужение на выбранную окрестность функции примет в рассматриваемой точке наибольшее или наименьшее значение. Из теоремы Ферма, примененной к указанному сужению функции, следует, что если в указанной точке производная существует, то она равна нулю. ◁

Замечание 2. Напомним, что под производной всегда понимается конечная производная, если специально не оговорено, что допускаются и бесконечные производные (см. п. 10.1). Из комментариев к теореме Ферма (замечание 1 в п. 12.1) следует, что в точке локального экстремума может существовать знаконеопределенная бесконечная производная, но не может существовать бесконечная производная определенного знака. Может случиться, что в точке локального экстремума вообще не существует производной — ни конечной, ни бесконечной (см. рис. 77).

Отметим, что условия равенства нулю производной или ее несуществования в данной точке, будучи необходимыми условиями экстремума, не являются достаточными условиями для наличия экстремума в этой точке. Например, у функции $f(x) = x^3$ производная $f'(x) = 3x^2$ в точке $x = 0$ равна нулю, а экстремума в этой точке нет (рис. 82).

Определение 2. Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке производная функции либо существует и равна нулю, либо не существует, то точка x_0 называется *критической точкой* этой функции.

Критические точки функции, в которых производная функции равна нулю, называются также и *стационарными точками.*

Теорема 2 означает, что все точки локального экстремума функции находятся среди множества ее критических точек.

Определение 3. Точка x_0 называется *точкой возрастания* (*убывания*) функции f, если у x_0 существует такая окрестность $U(x_0)$, что при $x \in X \cap U(x_0)$, $x < x_0$, выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$), а при $x > x_0$ — неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \leqslant f(x_0)$).

Если при $x \neq x_0$ выполняется, кроме того, неравенство $f(x) \neq$

$\neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой строгого возрастания* (*строгого убывания*) *функции* f.

Точки строгого экстремума, точки строгого возрастания и убывания удобно описывать в терминах знака приращения

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{15.6}$$

функции f.

В точке строгого максимума приращение функции в некоторой окрестности этой точки имеет отрицательное значение при $\Delta x \neq 0$, в точке строгого минимума — положительное, в точке строгого возрастания при $\Delta x < 0$ — отрицательное, при $\Delta x > 0$ — положительное, а в точке строгого убывания — положительное при $\Delta x < 0$ и отрицательное при $\Delta x > 0$ (рис. 83). Конечно, здесь всегда предполагается,

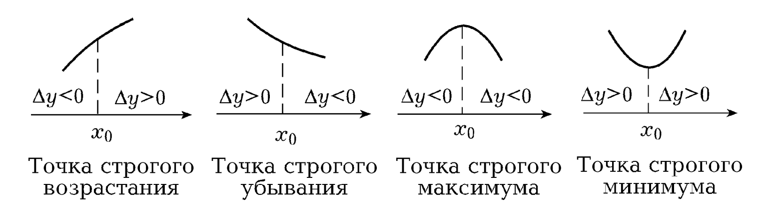


Рис. 83

что приращение аргумента Δx таково, что точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения X функции f.

Таким образом, при переходе через точку строгого экстремума x_0 (т. е. при изменении знака приращения аргумента Δx) приращение функции не меняет знака, а при переходе через точки строгого возрастания и убывания меняет знак.

Нетрудно сформулировать в терминах знака производной в точке достаточные условия того, что эта точка является точкой строгого возрастания или убывания (в этом случае согласно определению производной функция заведомо определена в некоторой окрестности рассматриваемой точки).

Лемма. *Если в точке конечная или бесконечная производная положительна* (*соответственно отрицательна*), *то эта точка является точкой строгого возрастания* (*строгого убывания*) *функции.*

▷ Если функция f имеет в точке x_0 положительную производную

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0, \tag{15.7}$$

то для всех достаточно малых Δx выполняется неравенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(15.7)}{>} 0. \tag{15.8}$$

Отсюда следует, что при $\Delta x < 0$ имеет место $\Delta y < 0$, а при $\Delta x > 0$ также и $\Delta y > 0$, т. е. точка x_0 является точкой строгого возрастания.

Аналогично рассматривается случай $f'(x_0) < 0$. $\triangleleft$

Таким образом, если в точке x_0 существует не равная нулю производная (конечная или определенного знака бесконечная), то эта точка является либо точкой строгого возрастания, либо точкой строгого убывания, а следовательно, не может быть точкой экстремума. Тем самым мы еще раз доказали, что если в точке экстремума существует конечная или определенного знака бесконечная производная, то она равна нулю (см. теорему 1 в п. 12.1).

Отметим, что доказанная лемма дает лишь достаточные, но не необходимые условия для точек строгого возрастания и строгого убывания функций, имеющих в этих точках конечные или бесконечные производные. Это видно уже на примере функции $f(x) = x^3$, у которой точка $x = 0$ является точкой строгого возрастания, а производная в ней равна нулю: $f'(0) = 0$ (см. рис. 82).

Замечание 3. Аналогично лемме нетрудно доказать, что если в точке производная, конечная или бесконечная, неотрицательна (неположительна), то эта точка является точкой возрастания (соответственно убывания) функции, но, вообще говоря, нестрогого.

Отметим, что у функции, равной тождественно постоянной на множестве ее задания, все точки этого множества являются как точками экстремума, так и точками возрастания и убывания функции.

Все это делает целесообразным введение понятий как точек экстремума, точек возрастания и убывания функции, так и точек строгого экстремума, точек строгого возрастания и строгого убывания функции.

Теорема 3. *Пусть функция непрерывна в некоторой окрестности точки, дифференцируема в ее проколотой окрестности, и производная с каждой стороны от рассматриваемой точки сохраняет один и тот же знак.*

Для того чтобы функция в этой точке имела строгий максимум (строгий минимум), необходимо и достаточно, чтобы при переходе через нее производная меняла знак с плюса на минус (соответственно с минуса на плюс).

Для того чтобы эта точка была точкой строгого возрастания (строгого убывания) функции, необходимо и достаточно, чтобы производная с обеих сторон от рассматриваемой точки была положительной (отрицательной).

Таким образом, образно говоря, в условиях теоремы точка является точкой строгого максимума (строгого минимума) функции тогда и только тогда, когда в этой точке строгое возрастание (строгое убывание) функции сменяется ее строгим убыванием (соответственно строгим возрастанием). Подобным образом точка является точкой

строгого возрастания (строгого убывания) функции тогда и только тогда, когда с обеих сторон от этой точки функция строго возрастает (соответственно строго убывает) (см. теорему 1).

$\triangleright$ Пусть функция f непрерывна в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ и производная сохраняет постоянный знак во всех точках проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$, лежащих с каждой стороны от точки x_0. Для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, согласно формуле Лагранжа, имеем $\Delta y = f'(\xi)\Delta x$, где точка ξ лежит между точками x_0 и $x = x_0 + \Delta x$. Таким образом,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi). \tag{15.9}$$

Поэтому если производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0: $f'(x) > 0$ при $\Delta x < 0$ и $f'(x) < 0$ при $\Delta x > 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(15.9)}{>} 0$ при $\Delta x < 0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(15.9)}{<} 0$ при $\Delta x > 0$. Отсюда $\Delta y < 0$ при всех Δx, $x_0 + \Delta x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, т. е. приращение функции Δy не меняет знака при переходе через точку x_0 и является отрицательным. Это означает, что точка x_0 является точкой строгого локального максимума.

Аналогично, из формулы (15.9) следует, что если производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(15.9)}{<} 0$ при $\Delta x < 0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(15.9)}{>} 0$ при $\Delta x > 0$, а поэтому при переходе через точку x_0 приращение функции Δy не меняет знака и положительно. Это означает, что точка x_0 является точкой строгого локального минимума.

Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку x_0, то из формулы (15.9) следует, что и отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ также не меняет знака при переходе через эту точку и его знак совпадает со знаком производной. Поэтому если $f'(x) > 0$, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, то $\Delta y < 0$ при $\Delta x < 0$ и $\Delta y > 0$ при $\Delta x > 0$, т. е. точка x_0 является точкой строгого возрастания, а если $f'(x) < 0$, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, то аналогично получаем, что точка x_0 является точкой строгого убывания. $\triangleleft$

Мы доказали, что каждое из рассмотренных условий о знаке производной с разных сторон от точки x_0 является достаточным условием соответственно для строгого локального максимума, строгого локального минимума, строгого возрастания или убывания функции в точке. Поскольку были рассмотрены все возможные случаи знаков производной с каждой стороны от точки x_0, то все сформулированные условия являются не только достаточными, но и необходимыми

для соответствующих утверждений (рис. 84).

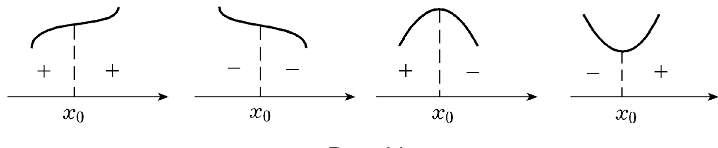


Рис. 84

Следует обратить внимание на то, что рассмотренным здесь случаем, когда производная с каждой стороны от данной точки не меняет своего знака (а поэтому можно говорить об изменении знака производной при переходе через точку), не исчерпываются возможные ситуации даже для дифференцируемых функций: может случиться, что для сколь угодно малой окрестности по одну из сторон от точки x_0 или по обе стороны производная меняет знак. В этих точках приходится применять другие методы для исследования функций на экстремум. Таким образом, в более широком классе функций, дифференцируемых в окрестности рассматриваемой точки, кроме, быть может, самой этой точки, условие изменения знака производной в данной точке является лишь достаточным условием экстремума.

Докажем еще одни достаточные условия для точек строгого экстремума и точек строгого возрастания (строгого убывания) в терминах производных любого порядка в данной точке. Эти условия для точек строгого возрастания и убывания обобщают условия, указанные в приведенной выше лемме. Для задачи же об экстремумах они представляют собой принципиально новый подход к отысканию точек экстремума, имеющий широкие обобщения.

Теорема 4. *Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, $n \geqslant 1$ и*

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{15.10}$$

Тогда если $n = 2m$, $m \in N$, т. е. n — четное число, то функция f имеет в точке x_0 строгий экстремум, а именно строгий максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и строгий минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$.

Если же $n = 2m-1$, $m \in N$, т. е. n — нечетное число, то функция f не имеет в точке x_0 экстремума; в этом случае при $f^{(2m-1)}(x_0) > 0$ точка x_0 является точкой строгого возрастания функции f, а при $f^{(2m-1)}(x_0) < 0$ — ее точкой строгого убывания.

Предпошлем доказательству одно простое замечание: если $\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \to x_0$, где функции α и β заданы в некоторой окрестности точки $x_0 \in R$, то существует такая окрестность $U(x_0)$ этой точки, что при $x \in U(x_0)$ справедливо неравенство

$$|\beta(x)| < \frac{1}{2}\,|\alpha(x)|. \tag{15.11}$$

В самом деле,

$$\beta(x) = \varepsilon(x)\alpha(x), \tag{15.12}$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, и, следовательно, существует такая окрестность $U(x_0)$, что при $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}. \tag{15.13}$$

Из (15.12) и (15.13) следует неравенство (15.11).

$\triangleright$ Напишем формулу Тейлора порядка n для функции f в окрестности точки x_0 (см. п. 14.1).

В силу условий (15.10) будем иметь

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,\Delta x^n + o(\Delta x^n), \quad \Delta x \to 0. \tag{15.14}$$

Так как $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то

$$o(\Delta x^n) = o\Big(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\delta x^n\Big), \quad \Delta x \to 0,$$

т. е. второй член правой части равенства (15.14) является бесконечно малым по сравнению с первым. Поэтому, согласно (15.11), существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что при $x \in U(x_0)$ для функции $o(\Delta x^n)$ в формуле (15.14) выполняется неравенство

$$|o(\Delta x^n)| < \frac{1}{2}\,\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}\,|\Delta x|^n$$

и, следовательно, при достаточно малых $\Delta x \neq 0$ знак правой части равенства (15.14), а потому и знак приращения функции Δy, совпадает со знаком первого слагаемого правой части.

Если $n = 2k$, то в формуле (15.14) приращение аргумента Δx возводится в четную степень, поэтому знак приращения функции Δy не зависит от знака $\Delta x \neq 0$ и, следовательно, x_0 является точкой строгого экстремума, причем строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0) < 0$ (в этом случае $\Delta y < 0$, $\Delta x \neq 0$) и строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0) > 0$ (в этом случае $\Delta y > 0$, $\Delta x \neq 0$).

Если же $n = 2k - 1$, то Δx возводится в нечетную степень, и поэтому знак Δy меняется вместе с изменением знака Δx, следовательно, точка x_0 не является точкой экстремума. Если Δx меняет знак с минуса на плюс, то при $f^{(2k-1)}(x_0) > 0$ приращение Δy также меняет знак с минуса на плюс и, следовательно, x_0 является точкой возрастания функции f, а при $f^{(2k-1)}(x_0) < 0$ приращение Δy меняет знак с плюса на минус и, следовательно, точка x_0 является точкой убывания функции f. $\triangleleft$

Отметим специально частный случай теоремы 4 при $n = 2$.

Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой строгого минимума, а если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ (рис. 85), то — точкой строгого максимума.

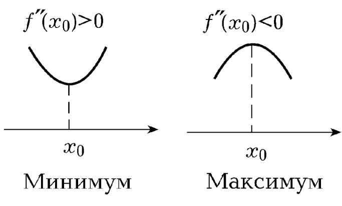


Рис. 85

Подчеркнем, что все условия экстремума, полученные в этом параграфе, относились к внутренним точкам промежутка, на котором была определена функция. На концах промежутка требуется проводить отдельные исследования и при применении методов дифференциального исчисления использовать в концевых точках понятие односторонних производных (см. п. 10.1).

15.3. Выпуклость и точки перегиба. Пусть функция f задана на интервале (a, b) и $a < x_1 < x_2 < b$. Проведем прямую через точки $A = (x_1, f(x_1))$ и $B = (x_2, f(x_2))$, лежащие на графике функции f. Уравнение этой прямой можно записать в виде

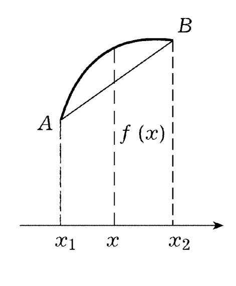
$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}. \tag{15.15}$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$, тогда оно запишется в виде

$$y = l(x).$$

Определение 4. Функция f называется *выпуклой вверх на интервале* (a, b), если, каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки x интервала (x_1, x_2) выполняется неравенство

$$l(x) \leqslant f(x). \tag{15.16}$$



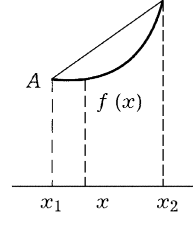


Рис. 86

Если же для всех точек $x \in (x_1, x_2)$ выполняется противоположное неравенство

$$l(x) \geqslant f(x), \tag{15.17}$$

то функция f называется *выпуклой вниз на интервале* (a, b).

Это означает, что любая точка хорды AB (т. е. отрезка прямой (15.15) с концами в точках A и B), например, в случае выпуклости вниз расположена не ниже точки графика функции f, соответствующей тому же значению аргумента (рис. 86).

Заметим, что функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда функция $-f$ выпукла вниз.

Если вместо неравенств (15.16) и (15.17) выполняются строгие неравенства $l(x) < f(x)$ и $l(x) > f(x)$, $a < x_1 < x < x_2 < b$, то функция f называется *строго выпуклой вверх*, соответственно *строго выпуклой вниз на интервале* (a, b). В этом случае любая точка хорды AB, кроме ее концов, лежит ниже (выше) соответствующей точки графика функции.

Всякий интервал, на котором функция (строго) выпукла вверх, соответственно (строго) выпукла вниз, называется *интервалом* (*строгой*) *выпуклости вверх*, соответственно *вниз* этой функции.

Теорема 5 (достаточные условия строгой выпуклости). *Если вторая производная функции отрицательна* (*положительна*) *во всех точках интервала, то функция строго выпукла вверх* (*соответственно строго выпукла вниз*) *на этом интервале.*

▷ Если $a < x_1 < x < x_2 < b$, то

$$l(x) - f(x) \underset{(15.15)}{=} \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Применив к разностям значений функций, стоящим в квадратных скобках, теорему о среднем Лагранжа (п. 12.2), получим

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x},$$

где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$. Применим теперь теорему о среднем Лагранжа к разности значений производной $f'(\eta) - f'(\xi)$; тогда будем иметь

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \xi < \zeta < \eta.$$

Здесь знак правой части равенства совпадает со знаком $f''(\zeta)$ (все остальные сомножители положительны). Поэтому если $f'' < 0$ на (a, b), то $l(x) < f(x)$, т. е. функция f строго выпукла вверх; если же $f'' > 0$ на (a, b), то $l(x) > f(x)$, т. е. функция f строго выпукла вниз. ◁

Отметим, что условие постоянства знака второй производной, являясь достаточным условием строгой выпуклости вверх или вниз, не является необходимым: на интервалах строгой выпуклости вверх или вниз вторая производная может обращаться в нуль. Например, функция $y = x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $y'' = 12x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Замечание 4. Из доказательства теоремы 5 видно, что если условие положительности второй производной на интервале заменить условием ее неотрицательности, то функция будет выпукла вниз на

этом интервале. Соответственно, если вторая производная неположительна на интервале, то функция выпукла вверх на этом интервале.

Покажем, что расположение графика дважды дифференцируемой функции относительно касательной к этому графику также зависит от знака второй производной.

Теорема 6. *Пусть функция f имеет во всех точках x интервала (a, b) положительную (отрицательную) вторую производную $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$). Тогда, какова бы ни была точка $x_0 \in$ $\in (a, b)$, все точки $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, графика функции f лежат выше (соответственно ниже) касательной, проведенной к нему в точке $(x_0, f(x_0))$, кроме самой этой точки, которая лежит на касательной.*

$\triangleright$ Если у функции f существует вторая производная в точке x_0, то в этой точке существует конечная первая производная, а следовательно, график функции имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ наклонную касательную

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{15.18}$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $L(x)$, тогда

$$f(x) - L(x) \underset{(15.18)}{=} [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применив к разности $f(x) - f(x_0)$ теорему о среднем Лагранжа, получим

$$f(x) - L(x) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

где $a < x_0 < b$, $a < x < b$, а ξ лежит между x_0 и x.

Применив еще раз теорему Лагранжа, но уже к разности производных $f'(\xi) - f'(x_0)$, будем иметь

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0), \tag{15.19}$$

где точка η лежит между ξ и x_0. Поскольку точка ξ лежит между точками x и x_0, то точки ξ и x расположены по одну сторону от точки x_0, и поэтому $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$. В силу этого знак разности $f(x) - L(x)$ при $x \neq x_0$ совпадает со знаком второй производной $f''(\eta)$. Следовательно, если на интервале (a, b) вторая производная положительна, то $f(x) > L(x)$, т. е. график функции f лежит над касательной, а если вторая производная отрицательна, то $f(x) < L(x)$, т. е. график функции лежит под касательной $y = L(x)$, $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. $\triangleleft$

Определение 5. Пусть функция f дифференцируема при $x = x_0$ и пусть $y = L(x)$ — уравнение наклонной касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ (см. (15.18)). Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется *точкой перегиба функции f*.

Если x_0 — точка перегиба функции, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика функции* f. В точке $(x_0, f(x_0))$ график функции f переходит с одной стороны наклонной касательной (15.18) на другую сторону (рис. 87).

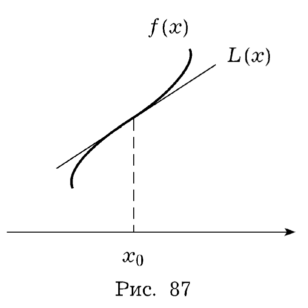


Рис. 87

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Поскольку $f''(x) = 6x$, то $f''(x) < 0$ для всех $x < 0$ и $f''(x) > 0$ для всех $x > 0$. Следовательно (теорема 5), функция $f(x) = x^3$ выпукла вверх на бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ и выпукла вниз на $(0, +\infty)$ (см. рис. 82). Уравнение касательной к ее графику в точке $(0,0)$ имеет вид $y = 0$. Поэтому поскольку при $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) < 0$, а при $x > 0$ — неравенство $f(x) > 0$, то точка $x = 0$ является точкой перегиба функции $f(x) = x^3$.

Теорема 7 (необходимое условие точки перегиба). *Если в точке перегиба функции существует вторая производная, то она равна нулю.*

$\triangleright$ Действительно, пусть функция f имеет в точке x_0 вторую производную и, как и выше, $y = L(x)$ — уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е.

$$L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда в силу формулы Тейлора

$$f(x) - L(x) = \\ = \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)\right) - L(x) = \\ = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad x \to x_0.$$

Если бы $f''(x_0) \neq 0$, то знак разности $f(x) - L(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 совпадал бы со знаком числа $f''(x_0)$. В этом случае разность $f(x) - L(x)$ не меняла бы знака в точке x_0 и, следовательно, эта точка не была бы точкой перегиба. Итак, если x_0 — точка перегиба функции f, то $f''(x_0) = 0$. $\triangleleft$

Теорема 8 (первое достаточное условие точек перегиба). *Если функция f дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности этой точки и ее вторая производная меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

$\triangleright$ Действительно, запишем, как и выше, уравнение касательной (15.18) к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ в виде $y = L(x)$. При

доказательстве теоремы 6 было показано (см. (15.19)), что

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

где точки ξ, η и x лежат по одну сторону от точки x_0, и, следовательно, всегда

$$(\xi - x_0)(x - x_0) > 0, \quad x \neq x_0,$$

кроме того, когда точка x переходит с одной стороны от точки x_0 на другую, то то же происходит и с точкой η.

В силу этого разность $f(x) - L(x)$, $x \neq x_0$, имеет тот же знак, что и вторая производная $f''(\eta)$, и так как по условию эта производная в точке x_0 меняет знак, то меняет знак в этой точке и разность $f(x) - L(x)$. Это и означает, что x_0 является точкой перегиба. $\triangleleft$

Теорема 9 (второе достаточное условие точек перегиба). *Если в некоторой точке вторая производная функция равна нулю, а третья не равна нулю, то эта точка является точкой перегиба.*

$\triangleright$ Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Согласно формуле Тейлора и в силу условия $f''(x_0) = 0$ имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3), \quad x \to x_0.$$

Отсюда, применив обозначение $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($y = L(x)$ — уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$), получим

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3), \quad x \to x_0.$$

Отсюда следует, что в некоторой окрестности точки x_0 разность $f(x) - L(x)$, т. е. разность ординат графика функции и касательной к нему, при $x \neq x_0$ имеет тот же знак, что $\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$, а следовательно, меняет его при переходе через точку x_0 (разность $x - x_0$ возводится в нечетную степень). Это и означает, что x_0 является точкой перегиба функции f. $\triangleleft$

15.4. Асимптоты.

Определение 6. Если функция f задана для всех $x > a$ (соответственно для всех $x < a$) и существует такая прямая

$$y = kx + l, \tag{15.20}$$

что

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0 \tag{15.21}$$

(соответственно при $x \to -\infty$), то эта прямая называется *асимптотой функции* f при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$).

Конечно, далеко не всякая функция имеет асимптоты. Существование асимптоты функции означает, что при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) функция ведет себя "почти как линейная функция", т. е. отличается от линейной функции на бесконечно малую.

Укажем методы отыскания асимптот (15.20). Будем рассматривать лишь случай $x \to +\infty$; для $x \to -\infty$ вывод уравнения асимптоты производится аналогичным способом. Пусть функция f при $x \to +\infty$ имеет асимптоту (15.20). Тогда поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, то из условия (15.21) следует, что тем более

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\,(f(x) - kx - l) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right) = 0,$$

откуда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{15.22}$$

Если значение k найдено, то значение l находится из условия (15.21):

$$l = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]. \tag{15.23}$$

Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если существуют такие числа k и l, что выполняется условие (15.23), то прямая $y = kx + l$ является асимптотой функции f при $x \to +\infty$, так как из (15.23) сразу следует условие (15.21).

Пример. Найдем асимптоту функции

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}. \tag{15.24}$$

Согласно формулам (15.22) и (15.23) имеем $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x(x-1)} = 1$,

$$l = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2.$$

Отсюда следует, что асимптотой функции (15.24) является прямая $y = x + 2$.

Уравнениями вида (15.20) описываются все прямые, которые не параллельны оси Oy, т. е. не вертикальны. Поэтому асимптоты вида (15.20) называют также и *наклонными асимптотами*. Сформулируем теперь определение вертикальных асимптот.

Определение 7. Если для функции f выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty, \tag{15.25}$$

то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой функции f.*

Для того чтобы имело смысл рассматривать первый (второй) предел (15.25), здесь предполагается, что функция f задана на пересечении некоторой окрестности точки x_0 с лучом $x < x_0$ (с лучом $x > x_0$).

Чтобы найти вертикальные асимптоты функции f, надо найти такие значения x_0, для которых выполняются одно или оба условия (15.25). Например, для функции (15.24) вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, ибо

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \infty.$$

15.5*. Построение графиков функций. С помощью развитого в этом параграфе математического аппарата можно изучать поведение функций и строить их графики. Общее изучение заданной функции целесообразно проводить в следующем порядке.

1. Определить область существования функции, область непрерывности и точки разрыва.

2. Найти асимптоты.

3. Приблизительно, вчерне, нарисовать график функции.

4. Вычислить первую, а если нужно, и вторую производные (без производных более высокого порядка обычно удается обойтись). Найти точки, в которых первая и вторая производные либо не существуют, либо равны нулю. Составить таблицу изменения знака первой и второй производных.

5. Определить интервалы возрастания, убывания, выпуклости вверх и вниз функции, найти точки экстремума (в том числе и концевые) и точки перегиба.

6. Окончательно вычертить график.

В результате, действуя подобным образом, мы, как правило, сумеем провести лишь качественное исследование заданной функции, так как, например, для нахождения точек экстремума согласно теореме 2 надо решить уравнение $f'(x) = 0$, а может оказаться, что точные значения корней этого уравнения мы не сумеем найти, а сумеем лишь с большей или меньшей точностью найти интервалы, где они находятся. В этом случае методы математического анализа позволяют, вообще говоря, осуществлять лишь качественное изучение поведения функции, а их количественное изучение осуществляется с помощью численных методов, возможности которых существенно расширяет использование современных вычислительных машин.

Пример. Построить график функции

$$f(x) = x \sqrt[3]{(x-1)^2}. \tag{15.26}$$

Функция f определена и непрерывна на всей числовой оси, поэтому у нее нет вертикальных асимптот. Поскольку $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty$, то у нее нет и наклонных асимптот.

Функция f неотрицательна при положительных значениях аргумента x и отрицательна при его отрицательных значениях; $f(0) =$

$f(1) = 0$;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Легко видеть, что $f(x) \sim x$ при $x \to 0$, $f(x) \sim x^{5/3}$ как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

На основе полученных данных можно построить эскиз графика функции (15.26) — он изображен на рис. 88. Для уточнения вида графика вычислим первую и вторую производные функции (15.26):

$$f'(x) = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}},$$

$$f''(x) = \frac{2(5x-6)}{9(x-1)\sqrt[3]{x-1}}.$$

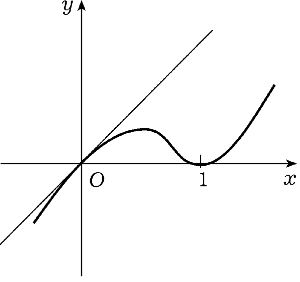


Рис. 88

Поскольку $f'(3/5) = 0$ и производная в точке $x = 3/5$ меняет знак с плюса на минус (отметим, что в достаточно малой окрестности точки $x = 3/5$ знаменатель у выражения для $f'(x)$ отрицателен), то эта точка является точкой максимума, что соответствует виду графика на рис. 85.

В точке $x = 1$ существует бесконечная производная, поэтому график функции (15.26) имеет в точке $(1, 0)$ вертикальную касательную.

Наконец, $f''(6/5) = 0$, и в точке $x = 6/5$ вторая производная меняет знак. Это означает, что точка $x = 6/5$ является точкой перегиба. Принимая во внимание все дополнительные исследования, можно существенно уточнить вид графика функции (15.26). Уточненный вид графика этой функции изображен на рис. 89.

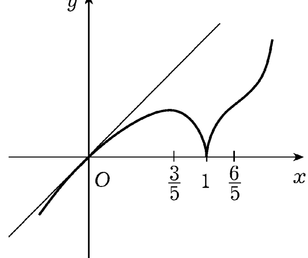


Рис. 89

§ 16. Векторные функции

16.1. Предел и непрерывность векторной функции. В этом параграфе будут изучаться функции, значениями которых являются векторы, а аргументами — числа. Такие функции называют *вектор-функциями* или *векторными функциями* (числового аргумента). Они обозначаются жирным шрифтом: $\mathbf{r}(t)$, или с помощью черты над значениями функции: $\overline{OM}(t)$, $t \in X$, где X — некоторое числовое мно-

жество.

В этом определении в зависимости от рассматриваемых задач под векторами $\mathbf{r}(t)$ могут пониматься как свободные векторы, так и векторы с закрепленными началами. Если начала всех векторов закреплены в одной и той же точке (обычно — начало координат), то такие векторы называются *радиус-векторами.*

Если в трехмерном евклидовом пространстве задана прямоугольная система координат, то, как хорошо известно, каждому вектору соответствует упорядоченная тройка действительных чисел — его координат и, наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует вектор, для которого числа, входящие в эту тройку, являются его координатами. Поэтому задание вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, эквивалентно заданию трех скалярных, т. е. числовых, функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t \in X$, являющихся его координатами:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)), \quad t \in X.$$

Длина (абсолютная величина) всякого вектора $\mathbf{a}$, обозначается $|\mathbf{a}|$ скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — через $\mathbf{ab}$ или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, а векторное — через $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Определим понятия предела, непрерывности, производной и дифференциала для векторных функций.

Определение 1. Вектор $\mathbf{a}$ называют *пределом* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, при $t \to t_0$ (или в точке $t = t_0$) и пишут

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}, \tag{16.1}$$

если

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0. \tag{16.2}$$

В этом определении $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|$ — числовая функция. Таким образом, понятие предела векторной функции сводится к понятию предела скалярной функции. Вспомнив определение этого понятия, получим, что (16.1) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существет такое $\delta > 0$, что для всех

$$t \in X \cap U(t_0, \delta) \tag{16.3}$$

выполняется неравенство

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon. \tag{16.4}$$

Как и в случае скалярных функций, будем предполагать, что t_0 является точкой прикосновения (конечной или бесконечно удаленной) множества X. Если t_0 — конечная точка, то условие (16.3) можно записать в виде

$$|t - t_0| < \delta, \quad t \in X, \tag{16.5}$$

а если t_0 — одна из бесконечно удаленных точек ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то соответственно в одном из следующих трех видов:

$$|t| > 1/\delta, \quad t > 1/\delta, \quad t < -1/\delta, \tag{16.6}$$

и, конечно, всегда $t \in X$.

Если начало всех векторов $\mathbf{r}(t)$ поместить в одну точку (например, в начало координат), то условие (16.4) будет означать, что концы всех векторов $\mathbf{r}(t)$ при $t \in X \cap U(t_0, \delta)$ лежат в шаре радиуса ε с центром в конце вектора $\mathbf{a}$ (рис. 90).

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, то

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2} \qquad (16.7)$$

и, следовательно,

$$|x(t) - a_1| \leqslant |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|,$$
$$|y(t) - a_2| \leqslant |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|, \qquad (16.8)$$
$$|z(t) - a_3| \leqslant |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|.$$

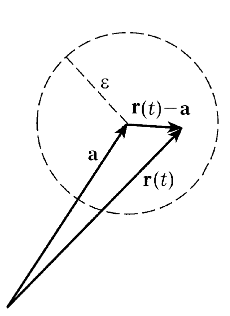


Рис. 90

Поэтому предел

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \qquad (16.9)$$

векторной функции $\mathbf{r}(t)$ существует в том и только том случае, когда существуют пределы ее координат

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \qquad (16.10)$$

Действительно, в силу соотношений (16.7) и (16.8) для того, чтобы выполнялось условие (16.2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to t_0} |x(t) - a_1| = 0, \quad \lim_{t \to t_0} |y(t) - a_2| = 0, \quad \lim_{t \to t_0} |z(t) - a_3| = 0.$$

Аналогично случаю числовых функций, если $t_0 \in X$ и на множестве X существует предел $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$, то этот предел равен значению функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0: $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Определение 2. Если t_0 — конечная точка и для функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in X$, имеет место равенство

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0), \qquad (16.11)$$

то эта функция называется *непрерывной в точке* t_0.

Как и в случае скалярных функций, условие (16.11) выполняется тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$ и $t_0 \in X$.

Если положить $\Delta t = t - t_0$, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$, то условие (16.11) примет вид $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Из эквивалентности условий (16.9) и (16.10) следует, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все ее координатные функции.

Отметим основные свойства пределов векторных функций.

1°. *Если* $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}$, *то* $\lim\limits_{t\to t_0}|\mathbf{r}(t)|=|\mathbf{a}|$.

Это непосредственно следует из неравенства $||\mathbf{r}|-|\mathbf{a}||\leqslant|\mathbf{r}-\mathbf{a}|$. Геометрический смысл этого неравенства состоит в том, что разность длин двух сторон треугольника не превышает длины его третьей стороны.

2°. $\lim\limits_{t\to t_0}[\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)$.

3°. $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\mathbf{r}(t)=\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)$ ($f(t)$ — *скалярная функция*).

4°. $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)$.

5°. $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)$.

В свойствах 2°–5° все рассматриваемые функции определены на некотором множестве $X\subset R$; предполагается, что все пределы, входящие в правые части равенств, существуют, и утверждается, что существуют пределы, стоящие в левых частях, причем имеют место написанные формулы.

Все эти свойства доказываются методом, аналогичным методу, которым доказывались свойства пределов скалярных функций в п. 6.7.

▷ Докажем в качестве примера свойство 5°. Заметим предварительно, что для любых двух векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{p}\times\mathbf{q}|=|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\sin\widehat{\mathbf{pq}}\leqslant|\mathbf{p}||\mathbf{q}|. \tag{16.12}$$

Поэтому если $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$, причем $\lim\limits_{t\to t_0}|\mathbf{p}(t)|=0$, а $|\mathbf{q}(t)|$ — ограниченная функция, то в силу неравенства (16.12)

$$\lim_{t\to t_0}|\mathbf{p}\times\mathbf{q}|=0. \tag{16.13}$$

Пусть теперь $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)=\mathbf{b}$. Положим

$$\boldsymbol{\alpha}(t)\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{a},\quad \boldsymbol{\beta}(t)\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{b}, \tag{16.14}$$

тогда, согласно (16.2),

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)|=\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\beta}(t)|=0. \tag{16.15}$$

Преобразуем произведение $\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)$ с помощью формул (16.14):

$$\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)=[\mathbf{a}+\boldsymbol{\alpha}(t)]\times[\mathbf{b}+\boldsymbol{\beta}(t)]=$$
$$=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\mathbf{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t). \tag{16.16}$$

Здесь в силу (16.13)

$$\lim_{t\to t_0}|\mathbf{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|=\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\mathbf{b}|=\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0,$$

а так как

$$|\mathbf{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\mathbf{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|\mathbf{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\mathbf{b}|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|,$$

то $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\mathbf{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0$.

Отсюда в силу (16.16) имеем $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)-\overline{\mathbf{a}}\times\overline{\mathbf{b}}|=0$, что согласно определению 1 (см. (16.2)) и доказывает свойство 5°. ◁

Из свойств пределов векторных функций и определения их непрерывности следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, а также произведение скалярных функций на векторные непрерывны в некоторой точке, если в этой точке непрерывны все слагаемые или соответственно сомножители.

16.2. Производная и дифференциал векторной функции. Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ задана в некоторой окрестности точки t_0; тогда соотношение $\dfrac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}$ определено в соответствующей проколотой окрестности точки t_0.

Определение 3. Предел $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}$ (если он, конечно, существует) называется *производной векторной функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $\mathbf{r}'(t_0)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$.

Если положить $\Delta t=t-t_0$, $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)$, то

$$\mathbf{r}'(t_0)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{16.17}$$

Пусть $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Так как

$$\frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}=\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right),$$

то в силу (16.9), (16.10) для того, чтобы векторная функция $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ имела производную в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имели производные в точке t_0, причем в этом случае

$$\mathbf{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)). \tag{16.18}$$

Производную $\mathbf{r}'(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ называют также *скоростью изменения вектора* $\mathbf{r}(t)$ относительно параметра t. В случае когда длина вектора $\mathbf{r}(t)$ не меняется, производная $\mathbf{r}'(t)$ называется также и *скоростью вращения вектора* $\mathbf{r}(t)$, а ее абсолютная величина — *численным значением скорости его вращения.*

Замечание 1. По аналогии со случаем скалярных функций векторную функцию $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $t\in X$, называют *бесконечно малой* по сравнению со скалярной функцией $\beta(t)$, $t\in X$, при $t\to t_0$ и пишут $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{o}(\beta(t))$, $t\to t_0$, если существует векторная функция $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, определенная на том же множестве X, что и функции $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\beta(t)$, такая, что в некоторой окрестности точки $t=t_0$ имеет место равенство $\alpha(t)=\varepsilon(t)\beta(t)$, $t\in X$, и

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\mathbf{0}.$$

Как и для скалярных функций, если $t_0 \in X$, то функция $\varepsilon(t)$ непрерывна в точке t_0, и потому $\varepsilon(t_0) = \mathbf{0}$.

Замечание 2. Вектор-функция аргумента t называется *линейной*, если она имеет вид $\mathbf{a}t + \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — какие-либо два фиксированных вектора.

После этих вводных замечаний можно определить понятие дифференцируемости и дифференциала вектор-функции.

Определение 4. Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, заданная в некоторой окрестности точки t_0, называется *дифференцируемой при* $t = t_0$, если ее приращение $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ в точке t_0 представимо в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{a}\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t), \quad \Delta t \to 0. \tag{16.19}$$

При этом линейная вектор-функция $\mathbf{a}\Delta t$ приращения аргумента Δt называется *дифференциалом функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается через $d\mathbf{r}$, т. е. $d\mathbf{r} = \mathbf{a}\Delta t$.

Таким образом,

$$\Delta\mathbf{r} = d\mathbf{r} + \mathbf{o}(\Delta t), \quad \Delta t \to 0. \tag{16.20}$$

Здесь функция $\mathbf{o}(\Delta t)$ определена при $\Delta t = 0$; в этой точке она равна нулю:

$$\mathbf{o}(\Delta t)\Big|_{\Delta t=0} = (\Delta\mathbf{r} - \mathbf{a}\Delta t)\Big|_{\Delta t=0} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, если представить эту функцию $\mathbf{o}(\Delta t)$ в виде (см. замечание 1) $\mathbf{o}(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)\Delta t$, то функция $\varepsilon(\Delta t)$ также будет определена при $\Delta t = 0$, а поэтому, как было отмечено выше, в этом случае $\varepsilon(0) = \mathbf{0}$. Благодаря этому здесь предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = \mathbf{0} \tag{16.21}$$

рассматривается не по проколотой, а по целой окрестности точки $\Delta t = 0$.

Формулу (16.19) теперь можно записать в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{a}\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = \mathbf{0}. \tag{16.22}$$

Докажем несколько простых утверждений о дифференцируемых векторных функциях, аналогичных соответствующим утверждениям для скалярных функций.

I. *Если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

$$\triangleright \quad \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{r} \underset{(16.22)}{=} \lim_{\Delta t \to 0} (\mathbf{a}\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t) = \mathbf{0}. \ \triangleleft$$

II. *Если векторная функция* $\mathbf{r}(t)$ *дифференцируема в точке* t_0, *то она имеет в этой точке производную и*

$$\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{a},$$

где вектор $\mathbf{a}$ *определяется формулой* (16.19).

$$\triangleright \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \underset{(16.19)}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\left(\mathbf{a}+\frac{\mathrm{o}(\Delta t)}{\Delta t}\right)=\mathbf{a}. \triangleleft$$

Верным является и обратное утверждение.

III. *Векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке.*

$\triangleright$ Если существует производная $\mathbf{r}'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ и, следовательно, $\mathbf{r}'(t_0)=\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}+\varepsilon(\Delta t)$, $\Delta t\neq 0$, где $\lim\limits_{\Delta t\to 0,\Delta t\neq 0}\varepsilon(\Delta t)=0$, то

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}'(t_0)\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\Delta t.$$

Полагая $\varepsilon(0)=\mathbf{0}$, получим, что условие $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(t)=0$ выполняется и без ограничения $\Delta t\neq 0$.

Таким образом, имеет место (16.22) при $\mathbf{a}=r'(t_0)$, т. е. функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и

$$d\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}'(t_0)\Delta t. \triangleleft$$

По определению считается, что $dt\overset{\text{def}}{=}\Delta t$. Поэтому (опуская для простоты обозначения аргумента) имеем $d\mathbf{r}=\mathbf{r}'dt$, или $\mathbf{r}'=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.

IV. *Если* $t=t(\tau)$ — *дифференцируемая в точке* τ_0 *числовая функция, а* $\mathbf{r}(t)$ — *дифференцируемая в точке* $t_0=t(\tau_0)$ *векторная функция, то сложная функция* $\mathbf{r}(t(\tau))$ *дифференцируема в точке* τ_0 *и*

$$\mathbf{r}'_\tau(t(\tau_0))=\mathbf{r}'_t(t_0)t'_\tau(\tau_0),$$

или, короче

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}. \tag{16.23}$$

$\triangleright$ Из соотношения (16.22) имеем при $\Delta\tau\neq 0$

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\tau}=r'_t\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau}+\varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta\tau}. \tag{16.24}$$

По условию функция $t=t(\tau)$ дифференцируема в точке τ_0, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta\tau}=t'(\tau_0). \tag{16.25}$$

Отсюда следует, что эта функция в рассматриваемой точке непрерывна:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\Delta t=0.$$

Отсюда и из условия (16.21) вытекает, что $\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\varepsilon(\Delta t)=\mathbf{0}$.

Из всего сказанного следует, что при $\Delta\tau \to 0$ правая часть равенства (16.24), а следовательно, и его левая часть имеют конечные пределы. Это означает, что в точке τ_0 существует производная $\mathbf{r}'_\tau$ и что

$$\mathbf{r}'(t(\tau_0)) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\left[\mathbf{r}'(t_0)\frac{\Delta t}{\Delta\tau} + \varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right] = \mathbf{r}'_t(t_0)t'_\tau(\tau_0). \ \lhd$$

Из формулы (16.23) аналогично случаю скалярных функций вытекает инвариантность записи дифференциала векторной функции: как для зависимой переменной t, так и для независимой τ имеем

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_t\,dt, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_\tau d\tau, \tag{16.26}$$

т. е. чтобы из второй формулы получить первую, надо подставить во вторую формулу $\mathbf{r}'_\tau = \mathbf{r}'_t \cdot t'_\tau$ и заметить, что $t'_\tau d\tau = dt$.

V. *Для производных вектор-функций имеют место формулы, аналогичные соответствующим формулам для скалярных функций*:

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2,$$
$$(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}',$$
$$(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}'_2,$$
$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}'_2.$$

Здесь все производные берутся в одной и той же точке. Предполагается, что производные, стоящие в правой части каждого равенства, существуют, и утверждается, что в этом случае существуют и производные, находящиеся в левых частях равенств.

$\rhd$ Доказываются эти формулы аналогично скалярному случаю. Докажем, например, последнюю из них.

Заметив, что $\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}_1(t_0) + \Delta\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}_2(t_0) + \Delta\mathbf{r}_2$, получим

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)'\Big|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t_0+\Delta t)\times\mathbf{r}_2(t_0+\Delta t) - \mathbf{r}_1(t_0)\times\mathbf{r}_2(t_0)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\mathbf{r}_1(t_0)+\Delta\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2(t_0)+\Delta\mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_1(t_0)\times\mathbf{r}_2(t_0)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\mathbf{r}_1}{\Delta t}\times\mathbf{r}_2(t_0) + \mathbf{r}_1(t_0)\times\frac{\Delta\mathbf{r}_2}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{r}_1}{\Delta t}\times\Delta\mathbf{r}_2\right) =$$
$$= \mathbf{r}'_1(t_0)\times\mathbf{r}_2(t_0) + \mathbf{r}_1(t_0)\times\mathbf{r}'_2(t_0). \ \lhd$$

Для дальнейшего нам будет полезна следующая

Лемма. *Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и все векторы $\mathbf{r}(t)$ имеют одну и ту же длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\mathbf{r}'(t_0)$ ортогональна вектору $\mathbf{r}(t_0)$*:

$$\mathbf{r}'(t_0)\mathbf{r}(t_0) = 0. \tag{16.27}$$

▷ Действительно, если в указанной окрестности $|\mathbf{r}(t)| = c$, где c — константа, то $|\mathbf{r}|^2 = c^2$, т. е. $\mathbf{r}^2 = c$. Дифференцируя это равенство, получим $2\mathbf{r}\mathbf{r}' = 0$, что равносильно равенству (16.27). ◁

Утверждение леммы содержательно лишь в случае, когда $\mathbf{r}'(t_0) \neq \neq 0$ (если $\mathbf{r}'(t_0) = 0$, то условие (16.27), очевидно, выполняется и без условия постоянства длины вектора $\mathbf{r}(t)$). В этом случае физический смысл формулы (16.27) состоит в том, что у материальной точки, движущейся по поверхности шара ($\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор этой точки, t — время движения, c — радиус указанного шара), скорость $\mathbf{v} = \dfrac{dr}{dt}$ всегда направлена при $\mathbf{v} \neq 0$ по касательной к поверхности шара, т. е. перпендикулярно радиусу шара.

Производные высших порядков для вектор-функции определяются по индукции: если у вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 задана производная $\mathbf{r}^{(n)}(t)$ порядка n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ($\mathbf{r}^{(0)}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}(t)$), то производная порядка $n + 1$ в этой точке (если эта производная, конечно, существует) определяется по формуле

$$\mathbf{r}^{(n+1)}(t_0) = (r^{(n)}(t))'\Big|_{t=t_0}.$$

Если векторная функция имеет в некоторой точке n производных, то говорят также, что она в этой точке *n раз дифференцируема.* Можно и для векторных функций по аналогии со скалярными ввести понятие дифференциалов высших порядков, но не будем на этом останавливаться.

Если векторная функция $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ n раз дифференцируема в точке $t = t_0$, то в некоторой окрестности этой точки для функции $\mathbf{r}(t)$ имеет место формула

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{r}^{(k)}(t_0)}{k!}\,\Delta t^k + \mathbf{o}(\Delta t^n), \quad \Delta t \to 0,$$

называемая по аналогии со скалярным случаем *формулой Тейлора* (порядка n) функции $\mathbf{r}(t)$ *с остаточным членом в виде Пеано.* Эта формула непосредственно следует из разложений по формуле Тейлора координат $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ векторной функции $\mathbf{r}(t)$.

Из всего сказанного видно, что рассмотренные определения и утверждения для векторных функций получаются перенесением соответствующих определений и утверждений из теории скалярных функций.

Замечание 3. Следует, однако, иметь в виду, что не все, что справедливо для скалярных функций, имеет прямой аналог в векторном случае. Это относится, например, к теореме Ролля, а следовательно, и к теореме Лагранжа, частным случаем которой является теорема Ролля.

В самом деле, рассмотрим дифференцируемую векторную функцию $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (третья координата функции $\mathbf{r}(t)$ — тождественный нуль). Поскольку $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, то $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$ при любом $t \in [0, 2\pi]$, и, следовательно, не существует такой точки $\xi \in [0, 2\pi]$, для которой было бы $\mathbf{r}'(\xi) = \mathbf{0}$, несмотря на то, что $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$.

Для векторных функций вместо прямого аналога теоремы Лагранжа можно доказать нижеследующую теорему 1.

Ее формулировке и доказательству предпошлем два замечания.

Замечание 4. Если вектор $\mathbf{x}$ ненулевой и $\mathbf{x}_0$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{x}$, т. е. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, то

$$|\mathbf{x}| = \mathbf{x}\mathbf{x}_0. \tag{16.28}$$

В самом деле, согласно определению скалярного произведения

$$\mathbf{x}\mathbf{x}_0 = |\mathbf{x}||\mathbf{x}_0| \cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}. \tag{16.29}$$

Здесь по условию $|\mathbf{x}_0| = 1$, а $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} = 0$ и, следовательно, $\cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} = 1$, т. е. равенство (16.29) превращается в равенство (16.28).

Замечание 5. Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеет место неравенство

$$\mathbf{x}\mathbf{y} \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{16.30}$$

$\triangleright$ Действительно,

$$\mathbf{x}\mathbf{y} \leqslant |\mathbf{x}\mathbf{y}| = ||\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,|\cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}| \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \ \triangleleft$$

Теорема 1. *Если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|(b - a). \tag{16.31}$$

$\triangleright$ Если $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, то неравенство (16.31) справедливо при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$, так как его левая часть обращается в нуль.

Пусть $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$ и, следовательно, $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) \neq \mathbf{0}$. Если $\mathbf{e}$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$, то согласно замечанию 4

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a))\mathbf{e} = \mathbf{r}(b)\mathbf{e} - \mathbf{r}(a)\mathbf{e},$$

т. е. получилась разность значений скалярной функции

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(t)\mathbf{e} \tag{16.32}$$

на концах отрезка $[a, b]$:

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = f(b) - f(a). \tag{16.33}$$

Из формулы (16.32) следует, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, ибо

согласно условиям теоремы этими свойствами обладает функция $\mathbf{r}(t)$. Поэтому в силу формулы конечных приращений Лагранжа существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Но согласно правилу дифференцирования скалярного произведения имеем $f'(t) = \mathbf{r}'(t)\mathbf{e}$, вследствие чего

$$f(b) - f(a) = \mathbf{r}'(\xi)\mathbf{e}(b - a), \quad a < \xi < b. \tag{16.34}$$

Поскольку в силу неравенства (16.30) имеет место неравенство

$$\mathbf{r}'(\xi)\mathbf{e} \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)||\mathbf{e}| = |\mathbf{r}'(\xi)|, \tag{16.35}$$

то
$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \underset{(16.33)}{=} f(b) - f(a) \underset{\substack{(16.34)\\(16.35)}}{\leqslant} |\mathbf{r}'(\xi)|(b - a), \quad a < \xi < b.$$

Неравенство (16.31) доказано. ◁

§ 17. Длина кривой

17.1. Понятие кривой. Рассмотрим отображение некоторого отрезка $[a, b]$ числовой прямой R в пространство R^3, т. е. такое отображение, которое каждой точке $t \in [a, b]$ ставит в соответствие точку $M(t)$ пространства R^3. Если в пространстве R^3 задана прямоугольная декартова система координат x, y, z, то между точками пространства R^3 и тройками чисел x, y, z имеется взаимно однозначное соответствие, а поэтому задание отображения $M(t) \in R^3$, $t \in [a, b]$, равносильно заданию трех числовых функций (называемых *координатными*) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ являются координатами точки $M(t)$.

Отображение $M(t) \in R^3$, $t \in [a, b]$, называется *непрерывным на отрезке* $[a, b]$, если на этом отрезке непрерывны все его координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение 1. Непрерывное отображение отрезка в пространство называется *кривой.*

Кривые будем обозначать большими греческими буквами Γ, Λ. Если $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — непрерывное отображение какого-либо отрезка $[a, b]$ в пространство, т. е. кривая Γ, то будем писать

$$\Gamma = \{M(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{17.1}$$

или

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{17.2}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координатные функции отображения $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ отображения $M(t)$, $t \in [a, b]$, однозначно задают вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$, координатами которой они являются:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{17.3}$$

Эта вектор-функция называется *векторным представлением кривой* (17.1). Если начало вектора $\mathbf{r}(t)$ поместить в начало координат, то его концом будет точка $M(t)$. При задании кривой Γ ее векторным представлением (17.3) пишут

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{17.4}$$

Множество точек пространства R^3, на которое отображение (17.1) отображает отрезок $[a, b]$, называется *носителем кривой* Γ.

Иногда там, где это не может привести к недоразумению, носитель кривой называется также кривой.

Если O — начало координат в пространстве R^3, то конец радиус-вектора $\overline{OM}(t)$ при изменении параметра t на отрезке $[a, b]$ пробегает носитель кривой Γ. В дальнейшем, когда будут рассматриваться векторные представления (17.4) кривой Γ, всегда будет предполагаться, что вектор $\mathbf{r}(t)$ является радиус-вектором с началом в начале координат, т. е. что $\mathbf{r}(t) = \overline{OM}(t)$.

Переменная t называется *параметром* на кривой Γ. Всякая строго монотонная непрерывная на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ функция

$$t = t(\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta, \tag{17.5}$$

отображающая отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, для которой, следовательно, в случае ее строгого возрастания выполняется условие

$$t(\alpha) = a, \quad t(\beta) = b,$$

а в случае строгого убывания — условие

$$t(\alpha) = b, \quad t(\beta) = a$$

(рис. 91), называется *преобразованием параметра* t кривой (17.1) (или,

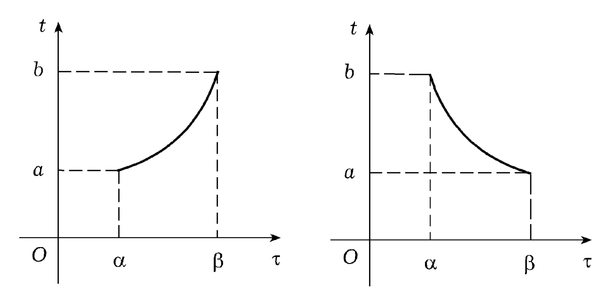


Рис. 91

полнее, *преобразованием параметра t к параметру τ*). Обратная к

функции $t = t(\tau)$ функция $\tau = \tau(t)$ является, очевидно, преобразованием параметра для кривой $\{M(t(\tau));\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$.

При преобразовании параметра $t = t(\tau)$ из равенства $M(t) = M(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, следует, что исходная кривая и кривая, получающаяся из нее с помощью преобразования параметра, имеют один и тот же носитель.

Если $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, — преобразование параметра, то кривые $\{M(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и $\{M(t(\tau))\colon\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$ часто называют одной и той же кривой с разными параметризациями.

Если координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ отображения (17.1) n раз дифференцируемы или n раз непрерывно дифференцируемы (т. е. имеют n непрерывных производных) на отрезке $[a, b]$, то кривая Γ называется *n раз дифференцируемой* или, соответственно, *n раз непрерывно дифференцируемой кривой.*

Преобразованиями параметра n раз (непрерывно) дифференцируемой кривой называются такие n раз (непрерывно) дифференцируемые строго монотонные функции (17.5), у которых во всех точках отрезка $[\alpha, \beta]$ их производная не равна нулю:

$$t'(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Это условие нужно для того, чтобы обратная функция $\tau = \tau(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, была также преобразованием параметра τ кривой $M(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ (см. формулы для производной обратной функции в п. 10.6).

Для того чтобы кривая Γ была n раз дифференцируема (соответственно n раз непрерывно дифференцируема, $n = 1, 2, \ldots$), необходимо и достаточно, чтобы ее векторное представление (17.2) было n раз дифференцируемо (соответственно n раз непрерывно дифференцируемо). Это следует из того, что непрерывность (дифференцируемость) векторной функции равносильна непрерывности (дифференцируемости) ее координат (п. 16.2).

Точка носителя кривой Γ, в которую при отображении (17.1) отображаются по крайней мере две разные точки отрезка $[a, b]$, называется *кратной точкой носителя* этой кривой или *точкой самопересечений кривой.* Если кратная точка носителя кривой Γ имеет в точности n прообразов при отображении $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, то эта точка называется *n-кратной.*

Если носитель кривой Γ не имеет кратных точек, т. е. отображение (17.1) взаимно однозначно отображает отрезок $[a, b]$ в пространство R^3, то кривая Γ называется *просто дугой.*

Точкой кривой (17.1) называется пара (M, t), где $M = M(t) \in R^3$, а $t \in [a, b]$. Точка $M \in R^3$ называется *носителем точки* (M, t). Носитель точки кривой там, где это не может привести к недоразумению, называется иногда также точкой кривой.

Если $M_0 = M(a)$, а $M_1 = M(b)$, то точка (M_0, a) называется *началом* кривой Г, а точка (M_1, b) — ее *концом* (впрочем, иногда обе точки (M_0, a) и (M_1, b) называют концами кривой Г). Если носители начала и конца кривой Г совпадают: $M(a) = M(b)$, то кривая Г называется *замкнутой*.

Если у носителя замкнутой кривой нет других кратных точек, кроме носителя ее начала и конца, который является двукратной точкой, то кривая Г называется *простым замкнутым контуром*.

Там, где это не может привести к недоразумениям (например, для простых дуг), точка (M, t) кривой Г часто обозначается $M(t)$, т. е. тем же символом, что и носитель указанной точки.

Если $t_1 \in [a, b]$, $t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$, то кривая $\{M(t);\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ называется *частью кривой* (17.1) или ее *дугой*

$$M(\widehat{t_1)M}(t_2)$$

с началом в точке $M(t_1)$ и концом в $M(t_2)$.

Если носитель кривой Г лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*.

Примеры. 1. Рассмотрим две замкнутые плоские кривые:

$$x = \cos t,\ y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{17.6}$$

и

$$x = \cos t,\ y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi. \tag{17.7}$$

Их носителями является одна и та же окружность $x^2 + y^2 = 1$, но это две разные кривые: у кривой (17.6) параметр t изменяется от 0 до 2π, и эта окружность проходится один раз, а у кривой (17.7) параметр t изменяется от 0 до 4π, и та же окружность проходится два раза.

Носитель кривой (17.6) имеет только одну кратную точку — носитель начала и конца этой кривой. У носителя кривой (17.7) все точки кратные.

2. Непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, задает плоскую кривую $x = t$, $y = f(t)$, $a \leqslant b$, являющуюся, очевидно, простой дугой. Ее носителем является график функции f, а параметром — переменная x. В этом случае пишут

$$\Gamma = \{y = f(x);\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

и говорят, что кривая Г *имеет явное представление — функцию* f.

Упорядоченность точек отрезка $[a, b]$ порождает с помощью отображения $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, упорядоченность точек на кривой $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$. Если $t_1 < t_2$, то точка $M(t_1)$ кривой Г называется точкой, *предшествующей точке* $M(t_2)$ этой кривой. Этот порядок точек называется *ориентацией кривой*, а кривая, на которой задана ориентация, называется *ориентированной кривой*.

Порядок точек на кривой
$$\{M(a+b-t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{17.8}$$
называется *противоположным* порядку точек кривой $\Gamma\{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ (*противоположной ориентацией* кривой), а сама кривая (17.8) — кривой, *ориентированной противоположно* к данной кривой Γ.

Для ориентированной кривой преобразованием параметра называются только строго возрастающие функции — они не меняют порядок точек, в то время как строго убывающие меняют их порядок на противоположный.

Замечание 1. Задания кривой Γ в виде $M(t)$, $(x(t), y(t), z(t))$ и $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называют ее параметрическими заданиями, а саму кривую Γ называют также *параметрически заданной* непрерывной кривой.

Замечание 2. Если для плоской кривой Γ существует такая функция $F(x,y)$, что координаты всех точек (x,y) носителя кривой Γ удовлетворяют условию
$$F(x,y) = 0, \tag{17.9}$$
то говорят, что уравнение (17.9) является *неявным заданием кривой* Γ.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря, множество всех точек, удовлетворяющих уравнению вида (17.9), не является носителем некоторой кривой в определенном выше смысле даже для достаточно "хороших" функций $F(x,y)$. Например, множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению
$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-1) = 0,$$
представляет собой окружность $x^2+y^2=1$ и точку $(0,0)$.

Замечание 3. В случае кривых, лежащих на плоскости, иногда бывает удобно их задавать в полярных координатах ρ, φ (ρ — полярный радиус точки плоскости, а φ — угол, образованный им с полярной осью), которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{17.10}$$
В полярных координатах кривая задается уравнениями вида
$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta. \tag{17.11}$$
С помощью формул (17.10) задание кривой уравнением (17.11) сразу сводится к ее параметрическому заданию
$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$
где за параметр взят полярный угол φ.

Замечание 4. Отметим еще, что сформулированное определение кривой не охватывает все то, что интуитивно естественно отнести

к понятию кривой, например, прямую линию, гиперболу, параболу и т. п. Чтобы охватить определением и подобные "кривые", следует рассмотреть отображения в пространство не только отрезков, но и других промежутков числовой оси: интервалов и полуинтервалов.

17.2. Касательная к кривой. Пусть задана кривая $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $\mathbf{r}(t) = \overline{OM}(t)$ — радиус-вектор точки $M(t)$, вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке $t_0 \in [a, b]$ и $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. В силу определения дифференцируемости

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t), \quad \Delta t \to 0.$$

Из этой формулы и из условия $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ следует, что для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ имеет место неравенство $\Delta\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \neq \mathbf{r}(t_0)$, а поэтому точки $M_0 = M(t_0)$ и $M = M(t_0 + \Delta t)$ различны. Проведем через них прямую (она обычно называется *секущей*) M_0M. Очевидно, вектор $\Delta\mathbf{r}$, а следовательно, и вектор $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, $\Delta t \neq 0$, отличающийся от вектора $\Delta\mathbf{r}$ только скалярным множителем $1/\Delta t$, параллельны секущей M_0M. По условию в точке t_0 существует производная $\mathbf{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$. Геометрически это означает, что векторы $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, параллельные секущей M_0M, при $\Delta t \to 0$ стремятся к некоторому предельному вектору $\mathbf{r}'(t_0)$, по условию не равному нулю, а так как все секущие M_0M проходят через одну и ту же точку M_0, то прямую, проходящую через эту точку в направлении вектора $\mathbf{r}'(t_0)$, называют предельным положением секущих M_0M при $\Delta t \to 0$ (рис. 92) или *касательной* к кривой Γ в точке $M(t_0)$.

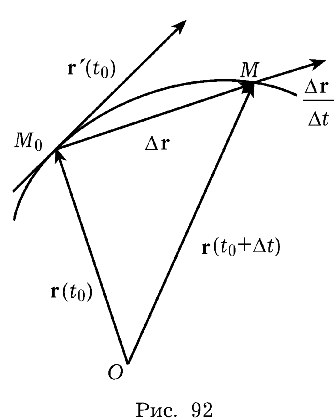


Рис. 92

Если начало вектора $\mathbf{r}'(t_0)$ поместить в точку $M(t_0)$, то он будет направлен по касательной, поэтому ее уравнение в векторной форме имеет вид

$$\rho = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty \tag{17.12}$$

(ρ — текущий радиус-вектор касательной), а в координатной —

$$x = x_0 + x'(t_0)\tau, \quad y = y_0 + y'(t_0)\tau, \quad z = z_0 + z'(t_0)\tau, \\ -\infty < \tau < +\infty, \tag{17.13}$$

или

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}$$

(здесь $\rho = (x, y, z)$, $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r}'(t_0) = (x_0', y_0', z_0')$).

Точка кривой Γ, в которой $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$, называется *особой*, а точка, в которой $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, — *неособой.*

Из сказанного выше следует, что геометрический смысл производной $\mathbf{r}'(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ состоит в том, что в неособой точке вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ направлен по касательной к кривой в конце радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$. В этом случае вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ называется вектором, *касательным к кривой в соответствующей точке.*

Если $\mathbf{r}'(t_0) = ... = \mathbf{r}^{(n-1)}(t_0) = 0$, а $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq 0$, то по формуле Тейлора

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!}\, \Delta t^n + \mathbf{o}(\Delta t^n). \tag{17.14}$$

Вектор $\Delta \mathbf{r}/\Delta t^n$ направлен по секущей M_0M, где, как и раньше, $M_0 = M(t_0)$, $M = M(t_0 + \Delta t)$, а $n! \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t^n} = \mathbf{r}^{(n)}(t_0)$.

Определяя и в этом случае касательную к кривой Γ в точке M_0 как предельное положение секущих M_0M при $\Delta t \to 0$, т. е. как прямую, проходящую через точку M_0 в направлении вектора $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$, получим ее уравнение в виде

$$\rho(\tau) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}^{(n)}(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty. \tag{17.15}$$

Замечание 1. Если рассматривается плоская кривая $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, то уравнение (17.14) касательной прямой превращается в уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'}, \tag{17.16}$$

лежащей в плоскости кривой.

Если эта кривая задается непрерывной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, дифференцируемой в точке x_0 (за параметр на кривой взята переменная x), то уравнение касательной в точке (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$, в силу формулы (17.16) имеет вид $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{f'(x_0)}$, т. е.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0. \tag{17.17}$$

Таким образом, получилось, конечно, то же самое уравнение касательной к графику функции, что и раньше (п. 10.3).

Сформулируем еще несколько определений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой.*

Кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *объединением кривых* Γ_i, если

$$\Gamma_i = \{\mathbf{r}(t)\,;\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$
$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b.$$

Очевидно, что в этом случае начало кривой Γ_1 является и началом кривой Γ, конец кривой Γ_n — концом Γ, а конец каждой кривой Γ_i — началом Γ_{i+1}, $i = 1, 2, ..., n-1$.

Кривая, являющаяся объединением конечного числа гладких кривых, называется *кусочно гладкой.*

Замечание 2. Понятие кривой имеет в своей основе понятие траектории движущейся материальной точки. Если конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает траекторию движения этой точки, а параметр t является временем движения, то производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ равна мгновенной скорости в данный момент времени.

17.3. Определение длины кривой. Спрямляемые кривые. Под длиной кривой понимается точная верхняя грань длин вписанных в эту кривую ломаных. Сформулируем это определение более подробно. Введем сначала понятие разбиения отрезка — понятие, которое будет неоднократно встречаться в дальнейшем.

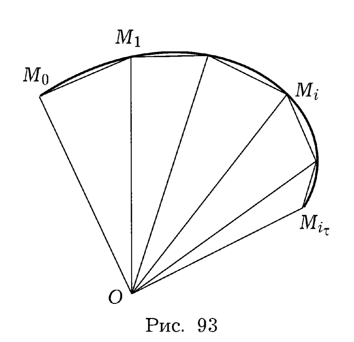


Рис. 93

Определение 2. Для отрезка $[a, b]$ всякая система $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ точек t_i, $i = 0, 1, 2, ..., i_\tau$, таких, что

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{i_\tau} = b,$$

называется его *разбиением.*

Пусть задана кривая

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$$

и пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Положим

$$\sigma_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|, \tag{17.18}$$

т. е. σ_τ — это длина ломаной с вершинами в точках M_i, являющихся концами радиус-векторов $\mathbf{r}(t_i)$, $i = 0, 1, ..., i_\tau$, иначе говоря, ломаной, вписанной в кривую Γ (рис. 93).

Определение 3. Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется ее *длиной.*

Таким образом, длина S_Γ кривой Γ определяется формулой

$$S_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sup_\tau \sigma_\tau, \tag{17.19}$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$. Очевидно, $0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty$.

Если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой.*

Теорема 1. *Если кривая* $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина* S_Γ *удовлетворяет неравенству*

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant c(b-a), \tag{17.20}$$

где

$$c = \max_{[a,b]} |\mathbf{r}'(t)|. \tag{17.21}$$

$\triangleright$ Прежде всего заметим, что в силу непрерывности на отрезке $[a,b]$ производной $\mathbf{r}'(t)$ числовая функция $|\mathbf{r}'(t)|$ также непрерывна на этом отрезке, а следовательно, ограничена и принимает на нем наибольшее значение. Поэтому существует число $c = \max\limits_{[a,b]} |\mathbf{r}'(t)| < +\infty$.

Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a,b]$. Тогда, используя очевидное векторное тождество

$$\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \tag{17.22}$$

и применяя теорему 1 из п. 16.2, получим

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \underset{(17.22)}{=} \Big| \sum_{i=1}^{i_\tau} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}) \underset{(17.21)}{\leqslant} c \sum_{i=1}^{i_\tau} t_i - t_{i-1} = c(b-a), \tag{17.23}$$

где $t_{i-1} < \xi_i < t_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \underset{(17.18)}{=} \sigma_\tau$ — длина вписанной в кривую Γ ломаной, соответствующей разбиению τ, то из неравенства (17.23) следует, что

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant \sigma_\tau \leqslant c(b-a).$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a,b]$, получим, в силу определения (17.19), неравенство (17.20)

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \underset{(17.19)}{=} \sup_\Gamma \sigma_\tau \leqslant c(b-a).$$

Поэтому $S_\Gamma < +\infty$, т. е. кривая Γ спрямляема. $\triangleleft$

Теорема 2. *Если кривая* $\Gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* $s = s(t)$, *отсчитываемая от начала кривой* Γ, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{17.24}$$

$\triangleright$ Как и выше, будем через $M(t)$ обозначать конец радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$. Пусть $s(t)$ — длина дуги кривой Γ от точки $M(a)$ до точки $M(t)$, $t \in [a,b]$, $t + \Delta t \in [a,b]$, и $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t_0)$. Очевидно, что $|\Delta s|$ является длиной дуги с концами в точках $M(t)$ и $M(t+\Delta t)$.

Поэтому согласно теореме 1 для $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$ имеет место неравенство

$$|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)| \leqslant |\Delta s| \leqslant c|\Delta t|, \tag{17.25}$$

где c — наибольшее значение $|\mathbf{r}'(t)|$ на отрезке с концами в точках t и $t+\Delta t$. Обозначим через $\xi = \xi(\Delta t)$ точку этого отрезка, в которой

$$|\mathbf{r}'(\xi)| = c. \tag{17.26}$$

Поделим обе части равенства (17.25) на $|\Delta t|$, $\Delta t \neq 0$:

$$\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| \leqslant c \underset{(17.26)}{=} |\mathbf{r}'(\xi)|. \tag{17.27}$$

Функция $s = s(t)$ возрастает (с увеличением дуги ее длина возрастает). Поэтому если $\Delta t > 0$, то $\Delta s \geqslant 0$, а если $\Delta t < 0$, то $\Delta s \leqslant 0$ и, следовательно, всегда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0$, иначе говоря, $\left|\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Таким образом, неравенство (17.27) можно записать в виде

$$\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|. \tag{17.28}$$

Левая и правая части этого неравенства имеют при $\Delta t \to 0$ один и тот же предел, равный $|\mathbf{r}'(t)|$.

В самом деле, в силу определения производной

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}\right| = |\mathbf{r}'(t)|.$$

Из выполнения же условия $\xi \in [t, t+\Delta t]$ при $\Delta t > 0$ или условия $\xi \in [t+\Delta t, t]$ при $\Delta t < 0$ следует, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\xi = t$, а так как функция $|\mathbf{r}'(t)|$ непрерывна, то отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\mathbf{r}'(\xi)| = |\mathbf{r}'(t)|$. А тогда из неравенства (17.28) получаем, что предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и также равен $|\mathbf{r}'(t)|$. Это означает, что существует производная $s'(t)$ и что $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$.

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, а потому

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}. \ \triangleleft \tag{17.29}$$

З а м е ч а н и е 1. Если длина σ дуг кривой Γ отсчитывается от ее конца, то $\sigma = S_\Gamma - s$ и, следовательно, $\dfrac{d\sigma}{ds} = -1$, поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -|r'(t)|.$$

З а м е ч а н и е 2. Если непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$ не имеет особых точек ($\mathbf{r}'(t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$), т. е. Γ — гладкая кривая, то в силу теоремы 2 переменная длина дуги $s = s(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a, b]$: $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0$. А так как $s(a) = 0$, $s(b) = S_\Gamma$, то обратная функция $t = t(s)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, S_\Gamma]$ и

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}. \tag{17.30}$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой ее параметр является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины дуги и производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(s)$ есть допустимое преобразование параметра в смысле п. 17.1 и, следовательно, на гладкой кривой в качестве параметра можно взять переменную длину ее дуг. Из сказанного вытекает также, что имеет смысл производная

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}. \tag{17.31}$$

Вектор $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ только числовым множителем $\dfrac{dt}{ds}$ отличается от касательного вектора $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0}$ и поэтому также направлен по касательной. Докажем, что вектор $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ является единичным вектором.

Т е о р е м а 3. *Если на кривой* $\Gamma = \{\mathbf{r}(s)\,;\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ *параметром является длина дуги и кривая непрерывно дяфференцируема, то*

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1. \tag{17.32}$$

$\triangleright$ Из формулы (17.24) при $t = s$ имеем

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \frac{ds}{ds} = 1. \ \triangleleft$$

Поскольку на гладкой кривой можно взять за параметр длину дуги, то формула (17.32) имеет место для гладких кривых.

Разъясним геометрический смысл равенства (17.32).

Отрезок, соединяющий две точки кривой, называется *хордой*, стягивающей дугу кривой с концами в этих точках. Пусть кривая Γ гладкая и $\mathbf{r}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, — ее векторное представление, в котором в качестве параметра выбрана переменная длина дуги кривой $s \in [0, S]$.

Длина хорды, соединяющей концы радиус-векторов $\mathbf{r}(s_0)$ и $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$, $s_0 \in [0, S]$, $s_0 + \Delta s \in [0, S]$, равна длине $|\Delta\mathbf{r}|$ вектора $\Delta\mathbf{r} =$

$= \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}(s_0)$ (рис. 94). В силу равенства (17.32) для предела отношения $\dfrac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|}$ при $\Delta s \to 0$ имеем

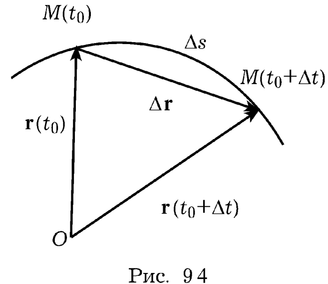


Рис. 94

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1, \tag{17.33}$$

т. е. отношение длины хорды к длине стягиваемой ею дуги стремится к единице, когда $\Delta s \to 0$.

Замечание 3. Координатами всякого единичного вектора являются его направляющие косинусы, т. е. косинусы углов, которые он образует с осями координат. Поэтому если обозначить через α, β и γ углы, которые образует с координатными осями переменных x, y и z единичный вектор $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$, то

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{17.34}$$

С другой стороны,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right). \tag{17.35}$$

Сравнив формулы (17.34) и (17.35), получим

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{17.36}$$

Замечание 4. Если плоская кривая является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. параметром кривой является переменная x, то $x' = 1$, и поэтому

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Замечание 5. Если кривая Γ гладкая и в качестве параметра на ней взята переменная длина дуги s, $0 \leqslant s \leqslant S$, то единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ является непрерывной функцией переменной s.

Если какая-то функция является непрерывной функцией параметра кривой, то будем говорить, что она непрерывна вдоль кривой. Теперь можно сказать, что на ориентированной гладкой кривой имеется непрерывный вдоль нее единичный касательный вектор. При изменении ориентации кривой, т. е. при переходе к параметру $s^* = S - s$, касательный вектор меняет свое направление. Действительно, поскольку $\dfrac{ds}{ds^*} = -1$, то $\boldsymbol{\tau}^* = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\dfrac{ds}{ds^*} = -\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = -\boldsymbol{\tau}$.

Таким образом, ориентации гладкой кривой однозначным образом соответствует выбор непрерывного единичного касательного вектора вдоль кривой τ или τ^*.

Пусть Γ — плоская кривая и на плоскости фиксирован базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. В этом случае каждому касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}^*$ соответствует единственный перпендикулярный к нему единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ и соответственно $\boldsymbol{\nu}^*$ (нормаль к кривой) такой, что пары векторов $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\nu}^*$ ориентированы так же как пара $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ векторов базиса (т. е. так, что определители преобразования этих пар положительны). Очевидно, что $\boldsymbol{\nu}^* = -\boldsymbol{\nu}$, и нормали $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\nu}^*$ также являются непрерывными функциями вдоль кривой Γ. Из сказанного ясно, что при фиксированной системе координат ориентация плоской кривой может быть задана непрерывной вдоль этой кривой единичной нормалью.

§ 18. Кривизна кривой

18.1. Определение кривизны и радиуса кривизны кривой. Важной характеристикой кривой является ее кривизна. Определим это понятие.

Определение 1. Абсолютная величина (длина) скорости вращения единичного касательного вектора к кривой в данной ее точке относительно переменной длины дуги называется *кривизной кривой в этой точке.*

Если $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — гладкая кривая, а $s = s(t)$ — переменная длина ее дуги, отсчитываемая от начала кривой Γ, то вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{18.1}$$

является единичным касательным вектором (теорема 3 в п. 17.3) к кривой Γ. Поэтому кривизна кривой в данной ее точке, обозначаемая обычно через k, согласно данному определению задается формулой

$$k = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|. \tag{18.2}$$

Отсюда в силу соотношения (18.1) следует, что

$$k = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|. \tag{18.3}$$

Из этой формулы видно, что определение (18.2) имеет смысл тогда, когда функция $\mathbf{r}(s)$ является по крайней мере дважды дифференцируемой.

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны кривой в данной точке* и обозначается через R. Таким образом,

$$R = \frac{1}{k}. \tag{18.4}$$

Пример. Покажем, что для окружности ее радиус совпадает с радиусом кривизны, и поэтому ее кривизна одна и та же во всех точках и равна обратной величине радиуса.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке O. Пусть A — фиксированная точка окружности. Угол α, образованный радиусом-вектором $\mathbf{r}$ некоторой точки окружности (обозначим ее B) с осью OA и угол, образованный единичным касательным к окружности в точке B вектором $\boldsymbol{\tau}$ с касательным вектором в точке A, равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 95).

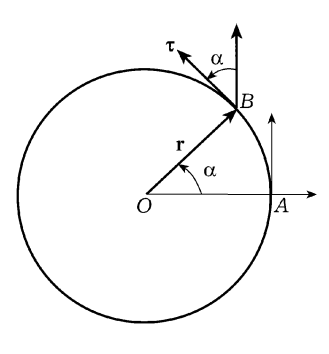


Рис. 95

Если s — длина дуги окружности, отсчитываемая от точки A в направлении возрастания угла α, то $\alpha = \dfrac{s}{R}$ и, следовательно,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}. \tag{18.5}$$

Для единичной окружности длина ее дуги совпадает со значением соответствующего ей угла α, и так как $|\boldsymbol{\tau}| = 1$, то

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\alpha}\right| \underset{(17.32)}{=} 1. \tag{18.6}$$

Поэтому для окружности радиуса R имеем

$$k = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\alpha}\right|\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| \underset{\substack{(18.5)\\(18.6)}}{=} \frac{1}{R}. \tag{18.7}$$

18.2. Формула для кривизны. Пусть

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{18.8}$$

— дважды дифференцируемая кривая без особых точек. Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемое преобразование параметра t к переменной длине s дуги кривой Γ: $t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma$ (см. замечание 2 в п. 17.3), причем

$$s''(t) = (s')' \underset{(17.24)}{=} (|\mathbf{r}'|)' = (\sqrt{\mathbf{r}'^2})' = \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|},$$

вектор $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ является единичным касательным к кривой Γ вектором и имеет производную

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \tag{18.9}$$

а следовательно, для рассматриваемой кривой в каждой ее точке определена кривизна k (см. (18.2)) и для нее справедлива формула (18.3).

Т е о р е м а 1. *Если $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, то в каждой точке кривой существует кривизна k и для нее справедлива формула*

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}. \tag{18.10}$$

Штрихом здесь и в дальнейшем обозначаются производные по параметру t, производные же по длине дуги будут обозначаться через $\frac{d}{ds}$.

$\triangleright$ Касательный вектор $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ единичный, т. е. имеет постоянную длину, равную единице. Поэтому его производная $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ ему перпендикулярна (см. лемму из п. 16.2). Длина векторного произведения $\boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ равна произведению длин сомножителей $|\boldsymbol{\tau}| = 1$ и $\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| \underset{(18.2)}{=} k$ на значение синуса угла между ними, т. е. на единицу, так как указанный угол прямой. Поэтому

$$\left|\boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = k. \tag{18.11}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{s'}, \tag{18.12}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{r}'}{s'}\right) = \left(\frac{\mathbf{r}'}{s'}\right)'\frac{dt}{ds} = \frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}. \tag{18.13}$$

Следовательно,

$$k \underset{(18.11)}{=} \left|\boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| \underset{\substack{(18.12)\\(18.13)}}{=} \left|\frac{\mathbf{r}'}{s'} \times \frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}\right| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{s'^3} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \tag{18.14}$$

ибо $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$. $\triangleleft$

Из формулы (18.10) можно получить формулу, выражающую кривизну через производные координатных функций: если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей переменных x, y, z и

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{18.15}$$

то

$$\mathbf{r}' = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'' = x''\,\mathbf{i} + y''\,\mathbf{j} + z''\,\mathbf{k}, \tag{18.16}$$

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \tag{18.17}$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \tag{18.18}$$

откуда

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}. \tag{18.19}$$

Подставив (18.17) и (18.19) в формулу (18.10), получим искомое выражение для кривизны.

18.3. Главная нормаль. Соприкасающаяся плоскость. Для того чтобы изучить расположение кривой относительно ее касательной в окрестности точки касания, полезно ввести понятие главной нормали.

О п р е д е л е н и е 2. Если в некоторой точке кривой ее кривизна не равна нулю ($k \neq 0$), т. е. существует производная $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \neq 0$, то единичный вектор в направлении вектора $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ называется *вектором главной нормали* (короче, *главной нормалью*) и обозначается через $\boldsymbol{\nu}$.

Так как $\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = k$ (см. (18.2)), то

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}, \quad |\boldsymbol{\nu}| = 1. \tag{18.20}$$

Эта формула называется *формулой Френе**).

То, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ называется нормалью, оправдывается тем обстоятельством, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ как вектор, параллельный производной $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$, перпендикулярен касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$ (см. лемму в п. 16.2).

Отметим два свойства главной нормали.

1°. *Направление главной нормали не зависит от выбора ориентации кривой.*

В самом деле, если σ — переменная длина дуги кривой Γ, отсчитываемая в противоположном, чем длина дуги s, направлении, и, следовательно, если $\sigma = S_\Gamma - s$, то, заметив, что $\frac{d\sigma}{ds} = -1$, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma},$$

а поэтому

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(-\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2}.$$

Таким образом, вектор $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ не зависит от выбора начала отсчета дуг на кривой, т. е. не зависит от ее ориентации. Главная нормаль

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \quad k \neq 0, \tag{18.21}$$

имеет то же направление, что и вектор $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$, поэтому она также не зависит от ориентации кривой.

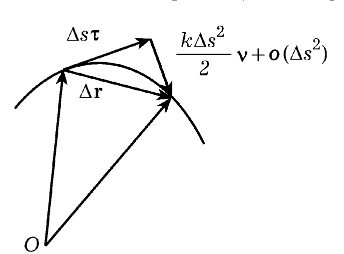
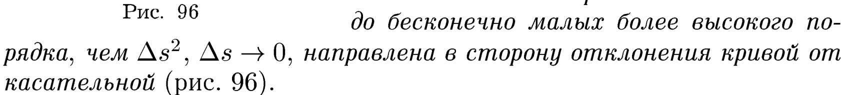


Рис. 96


2°. *Главная нормаль с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем* Δs^2, $\Delta s \to 0$, *направлена в сторону отклонения кривой от касательной* (рис. 96).

*) Ж. Френе (1816–1900) — французский математик.

Разложим векторную функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ в окрестности точки s_0 по формуле Тейлора:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}(s_0) = \frac{d\mathbf{r}(s_0)}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}(s_0)}{ds^2}\Delta s^2 + \mathbf{o}(\Delta s^2), \quad \Delta s \to 0. \tag{18.22}$$

Отсюда, вспомнив, что $\frac{d\mathbf{r}}{ds} \underset{(18.1)}{=} \boldsymbol{\tau}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \underset{(18.21)}{=} k\boldsymbol{\nu}$, получим

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta s\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\,k\,\Delta s^2\boldsymbol{\nu} + \mathbf{o}(\Delta s^2), \quad \Delta s \to 0. \tag{18.23}$$

Поскольку $\frac{1}{2}\,k\,\Delta s^2 > 0$, то разность $\Delta\mathbf{r} - \Delta s\boldsymbol{\tau}$, т. е. отклонение кривой от касательной, с точностью до $\mathbf{o}(\Delta s^2)$, $\Delta s \to 0$, направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$:

$$\Delta\mathbf{r} - \Delta s\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}\,k\,\Delta s^2\boldsymbol{\nu} + \mathbf{o}(\Delta s^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Определение 3. Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перепендикулярная касательной в этой точке, называется *нормалью к кривой в данной точке.* Нормаль к кривой, параллельная вектору $\boldsymbol{\nu}$, называется *главной нормалью.*

Таким образом, главной нормалью называют как вектор $\boldsymbol{\nu}$, так и параллельную ему прямую, проходящую через соответствующую точку кривой.

Определение 4. Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется *соприкасающейся плоскостью в этой точке.*

Эта плоскость обладает тем свойством, что дважды непрерывно дифференцируемая кривая в окрестности каждой своей точки, в которой кривизна не равна нулю, лежит "почти" в соприкасающейся плоскости. Это означает, что конец радиус-вектора $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$ отстоит от конца радиус-вектора $\mathbf{r}(s_0) + \Delta s\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\,k\,\Delta s^2\boldsymbol{\nu}$, лежащего, очевидно, на соприкасающейся плоскости, на величину, бесконечно малую по сравнению с Δs^2.

Это сразу следует из равенства (18.22):

$$\mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \left(\mathbf{r}(s_0) + \Delta s\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\,k\,\Delta s^2\boldsymbol{\nu}\right) = \mathbf{o}(\Delta s^2).$$

В силу определения соприкасающаяся плоскость однозначно определена для точек, в которых кривизна $k \neq 0$. Напишем уравнение этой плоскости для кривой, заданной произвольным дважды дифференцируемым векторным представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Как всегда, производные по переменной t будем обозначать штрихом, а производные по длине дуги s — символом $\frac{d}{ds}$. Дифференцируя

векторную функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ как композицию функций $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ и $s = s(t)$, получим

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}s' = s'\boldsymbol{\tau},$$

$$\mathbf{r}'' = s''\boldsymbol{\tau} + s'^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = s''\boldsymbol{\tau} + s'^2 k\boldsymbol{\nu}. \tag{18.24}$$

Таким образом, векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ являются линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ и, следовательно, также параллельны соприкасающейся плоскости. В силу же условия $k \neq 0$ выполняется неравенство $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| \neq 0$ (см. (18.10)), поэтому векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ не коллинеарны, а тем самым однозначно определяют параллельную им плоскость, проходящую через заданную точку.

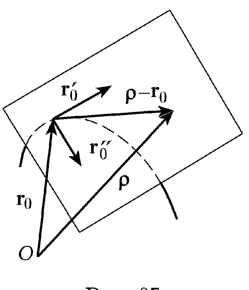


Рис. 97

Обозначим тезерь через $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_0'$ и $\mathbf{r}_0''$ радиус-векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$, соответствующие некоторой фиксированной точке данной кривой, а через $\boldsymbol{\rho}$ обозначим текущий радиус-вектор соприкасающейся плоскости в этой точке. Тогда смешанное произведение векторов $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_0'$ и $\mathbf{r}_0''$ должно быть равно нулю, так как все они параллельны соприкасающейся плоскости (рис. 97):

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0'') = 0. \tag{18.25}$$

Это и есть уравнение соприкасающейся плоскости в векторном виде. Если $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r}_0' = (x_0', y_0', z_0')$, $\mathbf{r}_0'' = (x_0'', y_0'', z_0'')$, то уравнение (18.25) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

18.4. Центр кривизны. Эволюта.

Определение 5. Точка пространства, находящаяся на расстоянии, равном радиусу кривизны от точки кривой в направлении вектора главной нормали, называется *центром кривизны кривой* в рассматриваемой точке этой кривой.

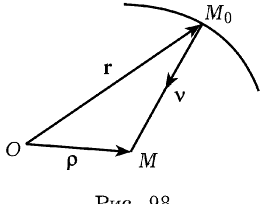


Рис. 98

Пусть R — радиус кривизны кривой Γ в точке M_0. Если $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор центра кривизны M, а $\mathbf{r}$, как обычно, есть радиус-вектор данной точки M_0 кривой, то (рис. 98) $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\nu}$, или, что то же самое (см. (18.4) и (18.21)),

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{1}{k^2}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}. \tag{18.26}$$

Найдем выражение вектора $\boldsymbol{\rho}$ через производные векторной функции $\mathbf{r}$ по произвольному параметру t.

Подставив в формулу (18.26) выражение для $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ через производные по t (см. (18.13)) и выражение для кривизны

$$k \underset{(18.10)}{=} \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3},$$

получим $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{|\mathbf{r}'|^6}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} \frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}$, а так как $|\mathbf{r}'| \underset{(17.24)}{=} s'$ (предполагается, что при возрастании параметра t длина дуги $s = s(t)$ также возрастает), то

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{s'^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}(s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'), \tag{18.27}$$

где $s' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, а поэтому

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{18.28}$$

Формулу (18.27) можно рассматривать как векторное представление некоторой кривой, точками носителя которой являются центры кривизны данной кривой. Эта кривая называется *эволютой* данной кривой.

18.5. Кривизна и эволюта плоской кривой. Пусть кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ лежит в некоторой плоскости; тогда и все производные векторной функции $\mathbf{r}(t)$, если их начало поместить на эту плоскость, будут также в ней лежать. В самом деле, приращение $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ лежит в этой плоскости, поэтому лежит в ней и отношение $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, а следовательно, и его предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{r}'$. Применив те же рассуждения к $\mathbf{r}'$, получим, что и $\mathbf{r}''$ лежит в указанной плоскости и т. д. Отсюда следует, что если кривая лежит в некоторой плоскости, то касательная к кривой (а если ее кривизна $k \neq 0$, то и главная нормаль) лежит в той же плоскости. Поэтому эта плоскость является соприкасающейся плоскостью для рассматриваемой кривой.

Запишем некоторые из формул, полученных в п. 18.4, более подробно для случая, когда кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\,;\ a \leqslant t \leqslant b\}$ лежит в плоскости переменных x и y: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. В этом случае

$$\mathbf{r}' = (x', y'), \quad \mathbf{r}'' = (x'', y''), \quad |\mathbf{r}'| = (x'^2 + y'^2)^{1/2},$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(0, 0, \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right), \quad |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = |x'y'' - x''y'|.$$

Поэтому из формул (18.4) и (18.10) получаем следующую формулу для кривизны:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{18.29}$$

Обозначим через (ξ, η) центр кривизны кривой Г. Из формул (18.27) и (18.28) следует, что

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(x'y'' - x''y')^2}\left((x'^2 + y'^2)^{1/2} x'' - \frac{x'x'' + y'y''}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}\, x'\right) \underset{(18.28)}{=}$$

$$\underset{(18.28)}{=} x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, y'. \qquad (18.30)$$

Аналогично,

$$\eta = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, x'. \qquad (18.31)$$

В случае когда кривая задается явно, т. е. функцией

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad (18.32)$$

(в этом случае $x = t$, $x' = 1$, $x'' = 0$) $s' = (1 + y'^2)^{1/2}$, формулы (18.29), (18.30), (18.31) принимают вид

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \qquad (18.33)$$

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''}\, y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \qquad (18.34)$$

На примере кривой, имеющей явное задание, поясним, что кривизна кривой является *угловой скоростью вращения* касательной к этой кривой относительно длины ее дуги.

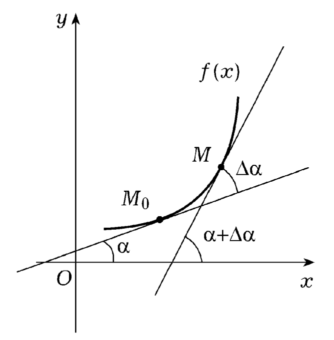


Рис. 99

Обозначим через α угол, образованный касательной к кривой (18.7) с осью x (рис. 99), и будем его рассматривать как функцию длины дуги s этой кривой, а s, в свою очередь, — как функцию переменной x.

Дифференцируя по x равенство $y' = \operatorname{tg} \alpha$, получим

$$y'' = \frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha} = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\, \frac{d\alpha}{ds}\, s', \qquad (18.35)$$

где (см. замечание 4 в п. 17.3) $s' = (1 + y'^2)^{1/2}$. Поэтому $y'' = (1 + y'^2)^{3/2} \dfrac{d\alpha}{ds}$ и, таким образом,

$$\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = k, \qquad (18.36)$$

т. е. действительно кривизна кривой k равна абсолютной величине угловой скорости $\dfrac{d\alpha}{ds}$ вращения касательной.

Примеры. 1. Найдем кривизну и эволюту параболы $y^2 = 2px$. Дважды дифференцируя это уравнение по x, получим $yy' = p$, $y'^2 + yy'' = 0$ и, следовательно,

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Подставив эти выражения в формулу (18.33), найдем кривизну

$$k = \frac{p^2}{|y^3|\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{3/2}} = \frac{p^2}{(y^2 + p^2)^{3/2}}, \tag{18.37}$$

и, подставив их в формулы (18.34), — уравнение эволюты

$$\xi = x + \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)y^3}{p^2}\frac{p}{y} = x + \frac{y^2 + p^2}{p} = 3x + p = \frac{3}{2p}\,y^2 + p, \tag{18.38}$$

$$\eta = y - \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)y^3}{p^2} = y - \frac{(y^2 + p^2)y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}. \tag{18.39}$$

Таким образом, в получившемся уравнении эволюты параболы роль параметра играет переменная y; исключив ее из этих уравнений, получим

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}\,(\xi - p)^3.$$

Эта кривая, как мы знаем (п. 3.7), называется *полукубической параболой* (рис. 100).

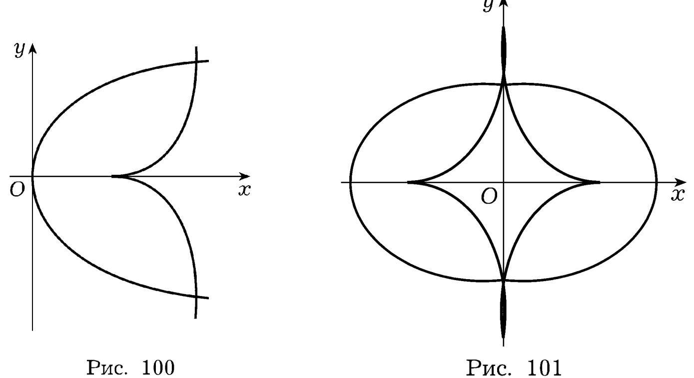


Рис. 100 Рис. 101

2. Найдем радиус кривизны R и эволюту эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad a \geqslant b > 0.$$

Заметив, что $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$, в силу формулы (18.29) получим

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab},$$

а из формул (18.30), (18.31) получим уравнение эволюты

$$xi = a\cos t - b\cos t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

Исключив из этих уравнений параметр t (для чего достаточно возвести их в степень $2/3$ и сложить их), найдем уравнение эволюты в неявном виде

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Полученная кривая называется *астроидой* (рис. 101).

ГЛАВА 2

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 19. Определение и свойства неопределенного интеграла

19.1. Первообразная и неопределенный интеграл. В этом параграфе рассматривается задача отыскания функции, для которой заданная функция является производной.

Пусть Δ — конечный или бесконечный промежуток числовой оси, т. е. интервал, полуинтервал или отрезок*), и на Δ заданы функции f и F.

Определение 1. Функция F называется *первообразной функцией* (или, короче, *первообразной*) функции f на промежутке Δ, если F дифференцируема на Δ и в каждой точке этого промежутка производная функции F равна значению функции f:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta. \tag{19.1}$$

При этом если некоторый конец промежутка Δ принадлежит этому промежутку, то под производной в этом конце, естественно, понимается соответствующая односторонняя производная. Поскольку функция, имеющая в данной точке производную, непрерывна в этой точке (односторонне непрерывна, если речь идет об односторонней производной), то первообразная F функции f непрерывна на промежутке Δ.

Пример. Функция $F(x) = x^3/3$ является первообразной функции $f(x) = x^2$ на всей числовой оси.

Иногда вместо слов "первообразная данной функции" говорят "первообразная для данной функции".

Первообразная любой функции непрерывна, так как она имеет производную. Функция же, у которой существует первообразная, не обязательно непрерывна, например, у разрывной в нуле функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

*) Если рассматриваемый промежуток является отрезком, то само собой разумеется, что он может быть только конечным.

на всей числовой оси существует первообразная

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для того чтобы две дифференцируемые на некотором промежутке функции были первообразными одной и той же функции, необходимо и достаточно, чтобы они на этом промежутке отличались на постоянную.*

Иначе говоря, функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются на промежутке Δ первообразными одной и той же функции тогда и только тогда, когда

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in \Delta, \quad C \text{ — константа.} \tag{19.2}$$

$\triangleright$ Если F — первообразная функции f, т. е. $F' = f$, то функция $F + C$ является первообразной той же функции f, ибо $(F + C)' = F' = f$.

Если F и Φ — первообразные для одной и той же функции f, т. е. $F' = \Phi' = f$, то $(F - \Phi)' = F' - \Phi' = 0$ и, следовательно, согласно следствию 1 теоремы Лагранжа (п. 12.2, теорема 3) разность $F - \Phi = C$ является постоянной на промежутке Δ. $\triangleleft$

Определение 2. Пусть функция f задана на некотором промежутке Δ. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется *неопределенным интегралом* от функции f и обозначается

$$\int f(x)\,dx. \tag{19.3}$$

Если множество первообразных некоторой функции не пусто, то говорят, что у нее существует неопределенный интеграл. Таким образом, существование интеграла $\int f(x)\,dx$ (на промежутке Δ) равносильно существованию у функции f первообразной на рассматриваемом промежутке.

Если F — какая-либо первообразная функции f на рассматриваемом промежутке, то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{19.4}$$

хотя правильнее было бы писать $\int f(x)\,dx = \{f(x) + C\}$ (здесь и в дальнейшем C — произвольная постоянная).

Иногда под $\int f(x)\,dx$ понимается не совокупность всех первообразных функции f, а произвольный элемент этого множества, т. е. произвольная первообразная рассматриваемой функции. С разночтением одного и того же обозначения мы встречались и раньше, например, символом $f(x)$ обозначается как сама функция, так и ее значение в точке x. Из контекста обычно всегда бывает ясно, в каком смысле в данном месте употреблено то или иное обозначение. Следует, однако, иметь в виду, что всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f, а ее произведение на дифференциал dx. Это делается, например, для того, чтобы указать, по какой переменной ищут первообразную:

$$\int x^2 z\,dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \quad \int x^2 z\,dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C.$$

Здесь в обоих случаях подынтегральная функция равна $x^2 z$, но ее неопределенные интегралы в первом и втором случаях различны, так как в первом случае она рассматривается как функция от переменной x, а во втором — как функция от z.

Другие принципиально более важные удобства, вытекающие из использования записи $\int f(x)\,dx$, будут указаны в дальнейшем (см. замену переменной в интеграле в п. 19.4).

Если F — какая-либо первообразная функции f на промежутке Δ, то согласно формуле (19.4) под знаком интеграла стоит дифференциал функции F:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx. \qquad (19.5)$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записывать в любом из указанных видов, т. е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x). \qquad (19.6)$$

19.2. Основные свойства интеграла. Все рассматриваемые в этом пункте функции определены на некотором фиксированном промежутке Δ. Перечислим свойства неопределенного интеграла, вытекающие непосредственно из его определения.

1°. *Если функция F дифференцируема на промежутке Δ, то $\int dF(x) = F(x) + C$, или, что то же самое,*

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Это сразу следует из определения неопределенного интеграла как совокупности всех дифференцируемых функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла.

2°. *Пусть функция f имеет первообразную на промежутке Δ; тогда для всех $x \in \Delta$ имеет место равенство*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \qquad (19.7)$$

Отметим, что в этом равенстве под интегралом $\int f(x)\,dx$ понимается произвольная первообразная F функции f. Поэтому (19.7) можно записать в виде равенства $dF(x) = f(x)\,dx$, справедливость которого следует из того, что F — первообразная f (т. е. из (19.1)).

3°. *Если функции* f_1 *и* f_2 *имеют первообразные на промежутке* Δ, *то и функция* f_1+f_2 *имеет первообразную на этом промежутке, причем*

$$\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{19.8}$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций. В правой его части стоит арифметическая сумма множеств (ее определение см. в п. 4.3). Оно означает, что сумма каких-либо первообразных для функций f_1 и f_2 является первообразной для функции f_1+f_2 и что, наоборот, всякая первообразная для функции f_1+f_2 является суммой некоторых первообразных для функций f_1 и f_2.

$\triangleright$ Пусть F_1 и F_2 — первообразные соответственно функций f_1 и f_2, т. е. в каждой точке $x\in\Delta$ выполняются равенства $F_1'(x)=f_1(x)$, $F_2'(x)=f_2(x)$. Тогда неопределенные интегралы $\int f_1(x)\,dx$ и $\int f_2(x)\,dx$ состоят соответственно из функций вида $F_1(x)+C_1$ и $F_2(x)+C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Положим $F(x)=F_1(x)+{}$ $+F_2(x)$, тогда функция F будет первообразной для функции f_1+f_2, ибо $F'(x)=F_1'(x)+F_2'(x)=f_1(x)+f_2(x)$, $x\in\Delta$.

Следовательно, интеграл $\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx$ состоит из функций $F(x)+C = F_1(x)+F_2(x)+C$, в то время как сумма интегралов $\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$ — из функций вида $F_1(x)+C_1+F_2(x)+C_2$. Поскольку C, C_1, C_2 — произвольные постоянные, то оба эти множества, т. е. левая и правая части равенства (19.8), совпадают. $\triangleleft$

4°. *Если функция* f *имеет первообразную на промежутке* Δ *и* k — *число, то функция* kf *также имеет на* Δ *первообразную и при* $k\neq 0$ *справедливо равенство*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{19.9}$$

Это равенство так же, как равенство (19.8), является равенством множеств.

$\triangleright$ Пусть F — первообразная функция f, т. е. $F'(x)=f(x)$, $x\in\Delta$. Тогда функция kF является первообразной функции kf на промежутке Δ при любом $k\in R$, ибо $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$, $x\in\Delta$. Поэтому интеграл $\int kf(x)\,dx$ состоит из всевозможных функций вида $kF+C$, а интеграл $k\int f(x)\,dx$ — из всевозможных функций $k(F+C)=kF+kC$. В силу произвольности постоянной C и условия $k\neq 0$ обе совокупности функций совпадают. Это и означает справедливость равенства (19.9). $\triangleleft$

Следствие (линейность интеграла). *Если функции* f_1 *и* f_2 *имеют первообразные на промежутке* Δ, *а* $\lambda_1\in R$ *и* $\lambda_2\in R$ — *такие числа,*

что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, *то функция* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *также имеет первообразную на* Δ, *причем*

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int f_2(x)\, dx.$$

Это непосредственно следует из свойств 3° и 4°.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (п. 25.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления интегралов для элементарных функций.

19.3. Табличные интегралы. Из всякой формулы для производной некоторой функции

$$F'(x) = f(x) \tag{19.10}$$

следует формула для неопределенного интеграла

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C. \tag{19.11}$$

Иначе говоря, чтобы проверить формулу (19.11) для конкретных функций, надо проверить для них справедливость равенства (19.10) во всех точках рассматриваемого промежутка. Таким способом можно доказать справедливость следующих пятнадцати формул, называемых *табличными интегралами.*

1. $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$, в частности, $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C.$
4. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
5. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \ |x| < a.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$ (если под корнем стоит $x^2 - a^2$, то $|x| > |a|$).

Само собой разумеется, что если знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в некоторой точке, то написанные формулы будут справедливы лишь для тех промежутков, в которых не происходит обращение в нуль указанного знаменателя.

19.4. Формула замены переменной. Познакомимся в заключение этого параграфа с двумя свойствами неопределенного интеграла, весьма полезными, в частности, для вычисления интегралов.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем функция φ отображает промежуток Δ_t на промежуток Δ_x, т. е.

$$\varphi(\Delta_t) = \Delta_x, \tag{19.12}$$

и, следовательно, имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in \Delta_t$.

Пусть, кроме того, функция $\varphi(t)$ дифференцируема на промежутке Δ_t и ее производная не меняет знака на Δ_t, т. е. для всех $t \in \Delta_t$ имеет место либо неравенство $\varphi'(t) > 0$, либо $\varphi'(t) < 0$, а следовательно (см. п. 15.1), функция $\varphi(t)$ строго монотонна на промежутке Δ_t. Тогда (см. п. 7.3) у функции $\varphi(t)$ существует обратная однозначная функция $\varphi^{-1}(x)$, определенная на промежутке Δ_x.

В формулируемой ниже теореме будем предполагать, что все перечисленные условия выполняются.

Теорема 1. *Существование на промежутке Δ_x интеграла*

$$\int f(x)\,dx \tag{19.13}$$

и существование на промежутке Δ_t интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{19.14}$$

равносильны, и имеет место формула

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{19.15}$$

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле: переменная x заменяется переменной t по формуле $x = \varphi(t)$.

Если в формуле (19.15) в обеих частях равенства перейти к переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, то, меняя местами левую и правую части равенства, получим

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}. \tag{19.16}$$

Иначе говоря, сделав сначала подстановку $\varphi(t) = x$, а затем взяв интеграл или сначала взяв интеграл, а потом сделав указанную подстановку, получим один и тот же результат.

Формула (19.16) обычно называется *формулой интегрирования подстановкой.* Эту формулу можно записать также в виде

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Ее применение к вычислению интегралов состоит в том, что вместо интеграла $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$ вычисляется интеграл $\int f(x)\,dx$, а затем полагается $x = \varphi(t)$. Формула замены переменной (19.15) и соответственно, формула интегрирования подстановкой (19.16) применяются тогда, когда интегралы, стоящие в их правых частях, в каком-то смысле проще интегралов, стоящих в их левых частях. Ниже, после доказательства теоремы, это будет пояснено на примерах.

$\triangleright$ Докажем сначала, что существование интегралов (19.13) и (19.14) равносильно, т. е. что равносильно существование первообразных у функции $f(x)$ на промежутке Δ_x и функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на промежутке Δ_t.

Пусть у функции $f(x)$ на промежутке Δ_x существует первообразная $F(x)$, т. е.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad x \in \Delta_x. \tag{19.17}$$

В силу условия (19.12) имеет смысл сложная функция $F(\varphi(t))$. Покажем, что она является на промежутке Δ_t первообразной функции $f(\varphi(t))\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$. Действительно, по правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt} \underset{(19.17)}{=} f(\varphi(t))\,\frac{d\varphi(t)}{dt}. \tag{19.18}$$

Наоборот, пусть теперь функция $f(\varphi(t))\,\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ имеет первообразную. Обозначим ее $\Phi(t)$:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\,\frac{d\varphi(t)}{dt}. \tag{19.19}$$

В силу условий, которым удовлетворяет функция φ, обратная к ней функция φ^{-1} дифференцируема во всех точках промежутка Δ_x, и имеет место формула (см. п. 10.6)

$$\frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}}\Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}, \quad x \in \Delta_x. \tag{19.20}$$

Покажем, что функция $\Phi(\varphi^{-1}(x))$ является на промежутке Δ_x первообразной для функции $f(x)$. В самом деле,

$$\frac{d}{dx}\,\Phi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d\Phi(t)}{dt}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} \underset{(19.19)}{=}$$

$$\underset{(19.19)}{=} f(\varphi(t))\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \frac{d\varphi(t)}{dt}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} \underset{(19.20)}{=} f(x).$$

Итак, интегралы (19.13) и (19.14) одновременно существуют или нет. При этом

$$\int f(x)\,dx \underset{(19.17)}{=} F(x) + C, \tag{19.21}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \underset{(19.18)}{=} F(\varphi(t)) + C, \tag{19.22}$$

а так как

$$F(\varphi(t))\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(x), \tag{19.23}$$

то

$$\int f(x)\,dx \underset{(19.21)}{=} F(x) + C \underset{(19.23)}{=} F(\varphi(t))\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C =$$

$$= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad \triangleleft$$

Примеры. 1°. Вычислим с помощью формулы замены переменной (19.13) интеграл

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Сделав замену переменной $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, получим

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

Аналогично вычисляется и интеграл $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, только здесь целесообразно положить $x = \operatorname{sh} t$:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,\operatorname{ch} t\,dt = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \int \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + C = \frac{1}{2}\left(t + \operatorname{sh} t\operatorname{ch} t\right) + C.$$

В полученном выражении надо вернуться к переменной x. Имеем $\operatorname{sh} t = x$, $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1+x^2}$. Переменную же t найдем из

уравнения $x = \operatorname{sh} t$, т. е. из уравнения $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$. Из него следует, что $y = e^t$ удовлетворяет квадратному уравнению $y^2 - 2xy - 1 = 0$ и, следовательно, $e^t = x + \sqrt{1 - x^2}$ (другой корень указанного квадратного уравнения отрицателен, а e^t принимает только положительные значения), откуда $t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

В результате окончательно получим

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + x\sqrt{1 + x^2}\right) + C.$$

2°. Вычисление интегралов с помощью формулы подстановки (19.16) целесообразно, например, применять к интегралам вида $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx$. Применив в них подстановку $\varphi(x) = u$, получим

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{du}{u}\bigg|_{u=\varphi(x)} = (\ln|u| + C)\big|_{u=\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

К такому типу интегралов относится интеграл

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Иногда, прежде чем применить метод интегрирования подстановкой, приходится проделать некоторые преобразования подынтегральной функции:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

19.5. Формула интегрирования по частям.

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке и на этом промежутке существует интеграл $\int v\, du$, то на нем существует и интеграл $\int u\, dv$, причем*

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{19.24}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям* неопределенного интеграла.

▷ Пусть функции u и v дифференцируемы на промежутке Δ; тогда по правилу дифференцирования произведения $d(uv) = v\, du + u\, dv$, и потому

$$u\, dv = d(uv) - v\, du. \tag{19.25}$$

Интеграл от каждого слагаемого правой части существует: интеграл $\int v\, du$ существует по условию, а по свойству 1° из п. 19.2 имеем

$$\int d(uv) = uv + C. \tag{19.26}$$

Поэтому, согласно свойству 3° из п. 19.2, существует и интеграл $\int u\,dv$, причем

$$\int u\,dv \underset{(19.25)}{=} \int d(uv) - \int v\,du \underset{(19.26)}{=} uv - \int v\,du,$$

где постоянная интегрирования C (см. (19.26)) отнесена к интегралу $\int v\,du$. Формула (19.24) доказана. ◁

Пример. Для вычисления интеграла $\int x\ln x\,dx$ положим $u = \ln x$, $dv = x\,dx$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$ и, следовательно,

$$\int x\ln x\,dx = \int \ln x\,d\,\frac{x^2}{2} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

§ 20. Интегрирование рациональных дробей

20.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей. В этом параграфе будут рассматриваться рациональные дроби, у которых в числителе и знаменателе стоят многочлены с действительными коэффициентами. Будет всегда предполагаться, что коэффициент у старшего члена многочлена, стоящего в знаменателе, равен 1 (этого, очевидно, всегда можно достичь, поделив числитель и знаменатель дроби на указанный коэффициент).

Будут изложены методы, с помощью которых можно вычислить, т. е. выразить через элементарные функции, интегралы от рациональных дробей.

Рассмотрим сначала элементарные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^n}$. Если $n > 1$, то

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \\ = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \quad (20.1)$$

Если $n = 1$, то

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C. \quad (20.2)$$

Вычислим теперь интеграл от элементарной дроби вида

$$\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Заметив, что

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

где $a^2 \overset{\text{def}}{=} q - \dfrac{p^2}{4} > 0$, и положив $t = x + \dfrac{p}{2}$, будем иметь

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{Bx+D}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n}\,dx = \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+D}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= B\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(D - \frac{pB}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Таким образом, вычисление интеграла $\displaystyle\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ сводится к вычислению интегралов, стоящих в правой части получившегося равенства.

Если $n = 1$, то

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C, \tag{20.3}$$

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C. \tag{20.4}$$

Если же $n > 1$, то

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}\,d(t^2+a^2) = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C. \tag{20.5}$$

Для интеграла $I_n \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, $n > 1$, выведем с помощью интегрирования по частям рекуррентную формулу, т. е. выразим I_n через I_{n-1}:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int t\,\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} \underset{(20.5)}{=}$$

$$\underset{(20.5)}{=} \frac{1}{a^2}\,I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\,I_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\,I_{n-1},$$

т. е.

$$I_n = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{20.6}$$

Так как интеграл I_1 уже вычислен (см. (20.4)), по формуле (20.6) можно последовательно вычислить I_2, I_3 и т. д.

Таким образом, интеграл от любой элементарной дроби находится в явном виде и является элементарной функцией.

20.2. Общий случай. Любую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а всякая правильная рациональная дробь раскладывается в сумму элементарных рациональных дробей (см. п. 3.5), поэтому задача интегрирования рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов и элементарных рациональных дробей, т. е. функций, от которых мы уже умеем вычислять интегралы. Имеет место следующая

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором ее знаменатель не обращается в нуль, существует и выражается через элементарные функции, являющиеся линейной комбинацией композиций рациональных дробей, логарифмов и арктангенсов.*

$\triangleright$ Для доказательства достаточно, поделив числитель на знаменатель, данную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ и $R(x)$ — многочлены, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, т. е. $\frac{R(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь. Разложив ее согласно теореме 2 из п. 3.5 на элементарные, получим, что всякая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и конечного числа элементарных рациональных дробей. Интеграл от каждого слагаемого этой суммы (см. п. 19.3 и п. 20.1) имеет вид, указанный в теореме. $\triangleleft$

Следует отметить, что при применении описанного метода интегрирования рациональных дробей на практике он приводит к окончательному результату, т. е. к элементарной функции, только в том случае, когда удается найти все корни знаменателя интегрируемой рациональной дроби.

§ 21. Интегрирование некоторых иррациональностей

21.1. Рациональные функции от функций. Функции вида

$$P(u_1, u_2, ..., u_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} ... \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 ... k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} ... u_n^{k_n}$$

называются *многочленами*, а функции $\frac{P(u_1, u_2, ..., u_n)}{Q(u_1, u_2, ..., u_n)}$, где P и Q — многочлены, называются *рациональными дробями* (или *рациональными функциями*) от переменных $u_1, u_2, ..., u_n$.

Композиция рациональных дробей $\frac{P(u_1, u_2, ..., u_n)}{Q(u_1, u_2, ..., u_n}$ с функциями

$u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x)$, ..., $u_n = f_n(x)$, т. е. функции вида

$$\frac{P(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))}{Q(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))},$$

называются *рациональными функциями от функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ и обозначаются $R(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$.

Например, $R(\sin x, \cos x) \equiv \dfrac{\sin^2 x + \cos x}{\cos^2 x - \sin x}$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, а $R(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}) \equiv \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$ — рациональная функция от $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$.

21.2. Интегралы вида $\displaystyle\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, ..., \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_n}\Big)\,dx$**.** Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, ..., \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_n}\Big)\,dx$.

Будем предполагать, что числа $r_1, ..., r_n$ рациональны и записаны с одним и тем же знаменателем: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, m — натуральное число, p_i целые, $i = 1, 2, ..., n$, и что определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ не равен 0. Если бы $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то существовали бы такие числа λ, μ, что $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ и $\lambda a + \mu c = 0$, $\lambda b + \mu d = 0$, а тогда, например, при $\lambda \neq 0$ имело бы место равенство

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\lambda ax + \lambda b}{\lambda(cx+d)} = \frac{-\mu cx - \mu d}{\lambda(cx+d)} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

и, следовательно, функция $R\Big(x, \Big(\dfrac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, ..., \dfrac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_n}\Big)$ была бы просто рациональной функцией.

Сделаем в рассматриваемом интеграле замену переменной

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{21.1}$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \overset{\text{def}}{=} \rho(t). \tag{21.2}$$

Здесь $\rho(t)$ — рациональная функция, поэтому $\rho'(t)$ — также рациональная функция. Поскольку

$$dx = \rho'(t)\,dt, \quad \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_j} \underset{(21.1)}{=} (t^m)^{p_j/m} = t^{p_j}, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

то

$$\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, ..., \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_n}\Big)\,dx =$$
$$= \int R(\rho(t), t^{p_1}, ..., t^{p_n})\rho'(t)\,dt = \int R^*(t)\,dt,$$

где $R^*(t) = R(\rho(t), t^{p_1}, ..., t^{p_n})\rho'(t)$ — рациональная функция.

Таким образом, замена переменной (21.1) сводит интеграл

$$\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1}, \ldots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_n}\Big)\, dx \qquad (21.3)$$

к интегралу от рациональной функции.

К рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$$\int R(x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_n})\, dx, \quad a \neq 0,$$

в частности интегралы $\int R(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_n})\, dx$.

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Сделаем согласно формуле (21.1) замену переменной $t^2 = x$, $t > 0$, откуда $dx = 2t\,dt$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t}\,dt = 2\Big(\int dt - \int \frac{dt}{1+t}\Big) =$$
$$= 2(t - \ln|1+t|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})) + C.$$

К интегралам вида (21.3) иногда удается свести интегралы других типов, например, интегралы вида $\int R(x, \sqrt{x^2+px+q})\, dx$, когда квадратный трехчлен x^2+px+q имеет действительные корни. В самом деле, если $x^2+px+q = (x-a)(x-b)$, то

$$R(x, \sqrt{x^2+px+q}) = R(x, \sqrt{(x-a)(x-b)}) =$$
$$= R\Big(x, |x-b|\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\Big) = R_1\Big(x, \Big(\frac{x-a}{x-b}\Big)^{1/2}\Big),$$

где R_1 — рациональная функция. Поэтому

$$\int R(x, \sqrt{x^2+px+q})\, dx = \int R_1\Big(x, \Big(\frac{x-a}{x-b}\Big)^{1/2}\Big)\, dx$$

и в правой части получился интеграл типа (21.3).

21.3*. Интегралы от дифференциального бинома. Рассмотрим интеграл вида

$$\int (a+bx^{\beta})^{\alpha} x^{\gamma}\, dx; \qquad (21.4)$$

его подынтегральное выражение называется *дифференциальным биномом.* Будем рассматривать случаи, когда α, β и γ являются рациональными, а a и b — произвольными действительными числами.

Сделаем в интеграле (21.4) замену переменной

$$x = t^{1/\beta}, \qquad (21.5)$$

тогда $dx = \frac{1}{\beta} t^{1/\beta - 1}\, dt$ и, следовательно,

$$\int (a + bx^\beta)^\alpha x^\gamma\, dx = \frac{1}{\beta}\int (a + bt)^\alpha t^{(\gamma+1)/\beta - 1}\, dt. \qquad (21.6)$$

Таким образом, интеграл (21.4) с помощью подстановки (21.5) сводится к интегралу вида

$$\int (a + bt)^\alpha t^\lambda\, dt, \qquad (21.7)$$

где α и λ — рациональные числа, $\lambda = \frac{\gamma+1}{\beta} - 1$.

Рассмотрим три случая.

1. α — целое число. Пусть $\lambda = m/n$, где m и $n > 0$ — целые числа. Согласно результатам п. 21.1 подстановка $u = t^{1/n}$ сводит интеграл (21.7) к интегралу от рациональной дроби.

2. λ — целое число. Пусть теперь $\alpha = m/n$, где m и $n > 0$ — целые числа. Тогда согласно тому же п. 21.1 интеграл (21.7) приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $u = (a + bt)^{1/n}$.

3. $\alpha + \lambda$ — целое число. Пусть, как и выше, $\alpha = m/n$, где m и $n > 0$ — целые числа. Имеем $\int (a + bt)^\alpha t^\lambda\, dt = \int \left(\frac{a + bt}{t}\right)^\alpha t^{\alpha+\lambda}\, dt$.

Снова получился интеграл типа, рассмотренного в п. 21.1: подстановка $u = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/n}$ сводит его к интегралу от рациональной функции.

Итак, в трех случаях, когда α, λ или $\alpha + \lambda$ являются целыми числами, интеграл (21.7) сводится к интегралу от рациональных функций. Поэтому если хотя бы одно из чисел α, $\frac{\gamma+1}{\beta}$ или $\frac{\gamma+1}{\beta} + \alpha$ в первоначальном интеграле (21.4) является целым числом, то этот интеграл сводится к интегралу от рациональных функций и, следовательно, выражается через элементарные функции.

Русский математик П.Л. Чебышев*) показал, что ни в каком другом случае рациональных показателей α, β и γ интеграл (21.4) не выражается через элементарные функции.

§ 22. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

22.1. Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ сводится подстановкой

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi, \qquad (22.1)$$

*) П.Л. Чебышев (1821–1894) — русский математик.

к интегралу от рациональной функции. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2\,du}{1+u^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2},$$

т. е. получился интеграл от рациональной функции.

При вычислении интегралов типа $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ часто оказываются полезными также и подстановки

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x. \tag{22.2}$$

В ряде случаев при интегрировании с помощью этих подстановок требуется провести меньше вычислений, чем при интегрировании с помощью подстановки (22.1).

Примеры. 1. Применим подстановку (22.1) для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{1-\sin x}.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = 2\int \frac{du}{\left(1-\frac{2u}{1+u^2}\right)(1+u^2)} = 2\int \frac{du}{(1-u)^2} = \frac{2}{1-u} + C = \\ = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ применим подстановку $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x}\,d(\operatorname{tg} x) = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)^2\,d(\operatorname{tg} x) = \int (1+u^2)^2\,du = \\ = \int (1+2u^2+u^4)\,du = u + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

22.2. Интегралы $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$. В случае когда m и n — рациональные числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ подстановкой $u = \sin x$ или $v = \cos x$ сводится к интегралу от иррациональной функции, а именно к интегралу от дифференциального бинома (п. 21.3*).

В самом деле, если, например, $u = \sin x$, то

$$dx = \frac{du}{\cos x} = (1-u^2)^{-1/2}\,du$$

и, следовательно,

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int u^m (1-u^2)^{(n-1)/2}\,du,$$

т. е. действительно получился интеграл от дифференциального бинома и, таким образом, выражается ли он через элементарные функции, зависит от того, какие при этом получились показатели степеней (см. п. 21.3*).

В случае когда m и n — целые числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ относится к типу интегралов, рассмотренных в предыдущем пункте, и для его вычисления целесообразно использовать подстановки (22.2). Например,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,d\cos x = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,d\cos x \underset{u=\cos x}{=}$$

$$\underset{u=\cos x}{=} -\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du = \int du - \int \frac{du}{u^2} = u + \frac{1}{u} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

Если $m = 2k+1$ и $n = 2l+1$ — нечетные числа, то полезна подстановка $t = \cos 2x$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin 2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l d\cos 2x = -\frac{1}{2^{k+l+2}}\int (1-t)^k (1+t)^l\,dt,$$

т. е. получился интеграл от рациональной дроби (k и l могут быть отрицательными).

Если m и n — четные числа, то полезна подстановка $u = \operatorname{tg} x$ — см. пример 2 в п. 22.1.

Если оба показателя m и n неотрицательные и четные, то, применив формулы $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, получим интеграл того же типа, но с меньшими показателями, например,

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Отметим, что методами, аналогичными методам, описанным в этом пункте, берутся интегралы вида $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\,dx$.

22.3. Интегралы $\int \sin\alpha x \cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x\,dx$. Интегралы $\int \sin\alpha x \cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x\,dx$ вычисляются, если их подынтегральные выраже-

ния преобразовать по формулам

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$
$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$
$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Например,

$$\int\sin x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\sin 3x\,dx - \frac{1}{2}\int\sin x\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

22.4. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям. К интегралам от трансцендентных функций, вычисляющимся с помощью интегрирования по частям, относится много разнообразных интегралов, например,

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx,\quad \int x^n\cos\alpha x\,dx,$$
$$\int x^n\sin\alpha x\,dx,\quad \int x^n e^{\alpha x}\,dx,\quad \int x^n\arcsin x\,dx,$$
$$\int x^n\arccos x\,dx,\quad \int x^n \operatorname{arctg} x\,dx,\quad \int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx,\quad \int x^n\ln x\,dx.$$

Здесь везде n — целое неотрицательное число.

Для вычисления интегралов $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ и $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ следует их дважды проинтегрировать по частям, в результате для каждого из них получится линейное уравнение, из которого они сразу находятся. Например,

$$I = \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x}d\cos\beta x = -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} +$$
$$+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\int e^{\alpha x}d\sin\beta x = -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} +$$
$$+\frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\right) = \frac{(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)\,e^{\alpha x}}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\,I;$$

отсюда $I = \dfrac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x} + C.$

В интегралах $\int x^n\cos\alpha x\,dx$, $\int x^n\sin\alpha x\,dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$ после однократного интегрирования по частям получаются интегралы тех же типов, но с меньшими показателями степени.

Рассмотрим пример:

$$\int x\sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -x\cos x + \int\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

В интегралах $\int x^n\arcsin x\,dx$, $\int x^n\arccos x\,dx$, $\int x^n\operatorname{arctg} x\,dx$,

$\int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int x^n \ln x\,dx$ в результате однократного интегрирования по частям пропадает трансцендентная функция, причем в первых двух получаются интегралы от иррациональных функций, выражающиеся через элементарные функции, а в трех последних — интегралы от рациональных функций и, следовательно, также выражающиеся через элементарные функции. Например,

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

В заключение подчеркнем, что далеко не всякий интеграл от элементарной функции выражается через элементарные функции. Среди таких интегралов встречаются интегралы, которые находят большое применение в различных разделах математики. К числу их относятся, например, вероятностный интеграл $\int e^{-x^2}\,dx$, интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$, интегральный синус $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$.

§ 23. Определенный интеграл

23.1. Определенный интеграл Римана*). Напомним, что множество $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ точек отрезка $[a,b]$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{k_\tau - 1} < x_{k_\tau} = b,$$

называется *разбиением отрезка* $[a,b]$, $a \in R$, $b \in R$.

Точки x_k называются *точками разбиения* τ, отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ — *отрезками разбиения* τ; их длины обозначаются Δx_k, т. е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, а число

$$|\tau| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_{k_\tau}\}$$

называемся *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение $\tau^* = \{x_k^*\}_{k=0}^{k=k_{\tau^*}}$ называется *разбиением, вписанным в разбиение* τ, если $\tau \subset \tau^*$, т. е. если каждая точка разбиения τ содержится в разбиении τ^*. В этом случае каждый отрезок $[x_{k-1}^*, x_k^*]$ разбиения содержится в некотором отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ разбиения τ, $j = 1, 2, ..., k_\tau$.

Разбиение τ^*, вписанное в разбиение τ, называется также *разбиением, следующим за разбиением* τ, и пишут $\tau^* \succ \tau$. В этом случае говорят также, что разбиение τ *предшествует разбиению* τ^*, и пишут $\tau \prec \tau^*$.

*) Б. Риман (1826–1866) — немецкий математик.

Существенными являются следующие два свойства разбиений отрезка.

1°. *Если* $\tau \prec \tau'$, *а* $\tau' \prec \tau''$, *то* $\tau \prec \tau''$.

$\triangleright$ Действительно, если каждый отрезок разбиения τ'' содержится в некотором отрезке разбиения τ', а каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ, то каждый отрезок разбиения τ'' содержится в соответствующем отрезке разбиения τ. $\triangleleft$

2°. *Для любых разбиений* τ' *и* τ'' *существует такое разбиение* τ, *что* $\tau \succ \tau'$ *и* $\tau \succ \tau''$.

$\triangleright$ В самом деле, таким разбиением является, например, разбиение, состоящее из всех точек обоих разбиений τ' и τ''. $\triangleleft$

Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$, и $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — некоторое разбиение этого отрезка. Всякая сумма σ_τ вида

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, ..., \xi_{k_\tau}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, ..., k_\tau,$$

называется *интегральной суммой Римана функции* f.

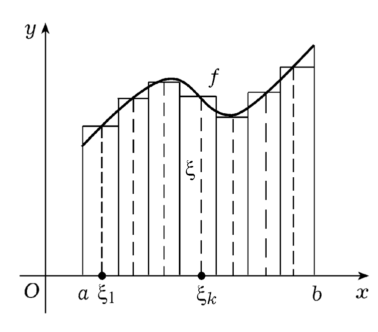


Рис. 102

В случае если функция f неотрицательна, то интегральная сумма σ_τ равна площади фигуры, составленной из прямоугольников с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой длины $f(\xi_k)$ (рис. 102).

Определение 1. Функция f называется *интегрируемой по Риману на отрезке* $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений

$$\tau_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}, \quad n = 1, 2, ...,$$

отрезка $[a, b]$, мелкость которых стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, и для любого выбора точек $\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, последовательности интегральных сумм

$$\sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, ..., \xi_{k_{\tau_n}}^{(n)}), \quad n = 1, 2, ...,$$

имеют и притом один и тот же предел.

Этот предел называется *интегралом Римана функции* f *по отрезку* $[a, b]$. Его обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и пишут

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{23.1}$$

Согласно определению это означает, что если

$$\sigma_{\tau_n} = \sum_{k=1}^{k_{\tau_n}} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k^{(n)}, \quad \xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}], \quad \Delta x_k^{(n)} = x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)},$$
$$k = 1, 2, ..., k_{\tau_n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, ..., \xi_{k_{\tau_n}}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

если только $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$.

Можно сформулировать определение интеграла Римана, и не используя понятия предела последовательности, а, как говорят, на "языке ε–δ".

Определение 2. Число I называется *интегралом Римана от функции f на отрезке* $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше δ: $|\tau| < \delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, выполняется неравенство

$$|\sigma_\tau(f; \xi_1, ..., \xi_{k_\tau}) - I| < \varepsilon.$$

Аналогично равносильности определений предела функции в терминах последовательностей и в терминах окрестностей доказывается и равносильность определений 1 и 2 интеграла Римана. Это рекомендуется читателю проделать самостоятельно.

В интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ число a называется *нижним*, а число b — *верхним пределом интегрирования.*

В дальнейшем для краткости вместо "функция, интегрируемая по Риману", будем говорить "интегрируемая функция", а вместо "интеграл Римана" — просто "интеграл".

Дополним определение интеграла следующими соглашениями.

Если функция f задана в точке $x = a$, то по определению $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то положим

$$\int_b^a f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx.$$

23.2. Ограниченность интегрируемых функций. Изучение определенного интеграла начнем с исследования необходимых, а затем и достаточных условий интегрируемости функций.

Теорема 1. *Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем.*

▷ Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$.

Зафиксируем какое-либо $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 1$. Согласно определению 2 интеграла существует такое $\delta > 0$, что для любой интегральной суммы σ_τ, соответствующей разбиению τ мелкости $|\tau| < \delta$, выполняется неравенство $|\delta_\tau - I| < 1$, а следовательно, и неравенство

$$I - 1 < \sigma_\tau < I + 1, \tag{23.2}$$

т. е. множество $\{\sigma_\tau\}$ значений интегральных сумм σ_τ, $|\tau| < \delta$, функции f ограничено.

Допустим теперь, что существует функция f, интегрируемая на некотором отрезке $[a, b]$, и неограниченная на этом отрезке. Возьмем произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$. Из того, что функция f неограниченна на отрезке $[a, b]$, следует, что она неограниченна и по крайней мере на одном из отрезков разбиения τ. Пусть для определенности функция f неограниченна на отрезке $[x_0, x_1]$. Из ее неограниченности на этом отрезке следует, что для любого числа n на нем существует такая точка, обозначим ее $\xi_1^{(n)}$, что

$$|f(\xi_1^{(n)})| > n, \quad \xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty. \tag{23.3}$$

Зафиксируем какие-либо точки ξ_k в остальных отрезках разбиения τ:

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 2, 3, \ldots, k_\tau.$$

Тогда сумма

$$\sum_{k=2}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{23.4}$$

будет иметь вполне определенное значение. Добавив к этой сумме слагаемое $f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1$, получим интегральную сумму $\sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, причем в силу условия (23.3) и постоянства суммы (23.4) будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \ldots, \xi_{k_\tau}) = \lim_{n\to\infty} \left[f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k\right] = \infty,$$

а следовательно, для л ю б о г о разбиения τ множество значений интегральных сумм $\sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \ldots, \xi_{k_\tau})$ неограниченно. Поэтому неограниченно и множество $\{\sigma_\tau\}$, $|\tau| < \delta$ (число $\delta > 0$ было выбрано выше), что противоречит неравенству (23.2). ◁

З а м е ч а н и е. Условие ограниченности функции, являясь необходимым условием интегрируемости функции по Риману, не является

достаточным условием для этого. В самом деле, рассмотрим, например, функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Каковы бы ни были отрезок $[a, b]$ и его разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, выбрав все точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ рациональными, в силу условия $f(\xi_k) = 1$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, получим

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, ..., \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k=\tau} \Delta x_k = b - a,$$

а выбрав точки ξ_k иррациональными, в силу условия $f(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, будем иметь

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, ..., \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k_\tau} 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Поэтому интегральные суммы σ_τ функции Дирихле заведомо не имеют предела при $|\tau| \to 0$.

Тем самым функция Дирихле дает пример функции, ограниченной на любом отрезке, но неинтегрируемой на нем.

23.3. Верхние и нижние суммы Дарбу*). Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение этого отрезка, $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Положим

$$M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x), \quad k = 1, 2, ..., k_\tau, \tag{23.5}$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{k=1}^{k_\tau} M_k \Delta x_k, \quad s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k. \tag{23.6}$$

Сумма S_τ, называется *верхней*, а сумма s_τ — *нижней суммой Дарбу функции* f. Очевидно, что в случае, когда функция f ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани (23.5) конечны, и потому суммы Дарбу (23.6) при любом разбиении принимают конечные значения. В дальнейшем будем предполагать, что функция f ограниченна — это естественно, так как нас будут интересовать свойства интеграла от функции f, а он, согласно теореме 1, может существовать только в том случае, когда функция ограниченна.

Из того, что выполняется неравенство $m_k \leqslant M_k$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, следует, что при любом разбиении τ выполняется неравенство

$$s_\tau \leqslant S_\tau. \tag{23.7}$$

Очевидно также, что в силу определения (23.5) чисел m_k и M_k для любых $\xi_k \in \Delta_k$ имеет место неравенство

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k, \quad k = 1, 2, ..., k_\tau.$$

*) Г. Дарбу (1842–1917) — французский математик.

Отсюда следует справедливость неравенства

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \equiv \sigma_\tau(f; \xi_1, ..., \xi_{k_\tau}) \leqslant S_\tau. \tag{23.8}$$

Отметим еще следующие свойства сумм Дарбу.

1°. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней*:

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2} \tag{23.9}$$

(τ_1 *и* τ_2 — *разбиения отрезка* $[a, b]$).

▷ Пусть сначала $\tau^* \succ \tau$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=1}^{j=j_{\tau^*}}$ — разбиения отрезка $[a, b]$,

$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \quad \Delta_j^* = [x_{j-1}^*, x_j^*],$$

$$m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x), \quad k = 1, 2, ..., k_\tau, \quad m_j^* = \inf_{x \in \Delta_j^*} f(x), \quad j = 1, 2, ..., j_{\tau^*}.$$

Условие $\tau^* \succ \tau$ означает, что каждый отрезок Δ_k разбиения τ является объединением некоторых отрезков разбиения τ^*. Обозначим эти отрезки $\Delta_{j_k}^*$, тогда $\Delta_k = \bigcup\limits_{j_k} \Delta_{j_k}^*$, где суммирование ведется по всем таким индексам j_k, что $\Delta_{j_k}^* \subset \Delta_k$. Отсюда следует, что

$$\Delta x_k = \sum_{j_k} \Delta x_{j_k}^*. \tag{23.10}$$

Кроме того, выполняются неравенства

$$m_k \leqslant m_{j_k}^*, \tag{23.11}$$

так как при переходе от отрезка Δ_k к содержащемуся в нем отрезку $\Delta_{j_k}^*$ нижняя грань значений функции может только увеличиваться.

Теперь легко доказать неравенство

$$s_\tau \leqslant s_\tau^*. \tag{23.12}$$

В самом деле,

$$s_\tau = \sum_k m_k \Delta x_k \underset{(23.10)}{=} \sum_k m_k \sum_{j_k} \Delta x_{j_k}^* \underset{(23.11)}{\leqslant} \sum_k \sum_{j_k} m_{j_k}^* \Delta x_{j_k}^* = \\ = \sum_j m_j^* \Delta x_j^* = s_{\tau^*}.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$S_{\tau^*} \leqslant S_\tau. \tag{23.13}$$

Пусть теперь τ_1 и τ_2 — два произвольных разбиения отрезка $[a, b]$. Возьмем какое-либо разбиение τ, вписанное в разбиения τ_1 и τ_2, т. е. $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$. Тогда неравенство (23.9) вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$s_{\tau_1} \underset{(23.12)}{\leqslant} s_\tau \underset{(23.7)}{\leqslant} S_\tau \underset{(23.13)}{\leqslant} S_{\tau_2}. \quad \triangleleft$$

2°. *Нижняя (верхняя) сумма Дарбу является нижней (верхней) гранью интегральных сумм Римана, соответствующих данному разбиению*:

$$s_\tau = \inf_{\xi_1,\ldots,\xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{k_\tau}), \tag{23.14}$$

$$S_\tau = \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{k_\tau}). \tag{23.15}$$

$\triangleright$ Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$ и $\xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$. Тогда в силу того, что нижняя грань арифметической суммы числовых множеств равна сумме нижних граней этих множеств, и того, что положительный постоянный множитель можно внести под знак нижней грани (п. 4.3*), получим

$$s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} \inf_{\xi_k \in \Delta_k} f(\xi_k)\Delta x_k =$$
$$= \inf_{\substack{\xi_k \in \Delta_k \\ k=1,2,\ldots,k_\tau}} \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k = \inf_{\substack{\xi_k \in \Delta_k \\ k=1,2,\ldots,k_\tau}} \sigma_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{k_\tau}),$$

т. е. равенство (23.14) доказано. Аналогично доказывается равенство (23.15). $\triangleleft$

3°. *Имеет место равенство*

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k, \tag{23.16}$$

где $\omega_k(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения τ, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$ (см. п. 7.4).

$\triangleright$ Формула (23.16) следует из того, что для любого множества $X \subset R^n$ справедливо равенство

$$\sup(X - X) = \sup_{x,x' \in X}(x' - x) = \sup X - \inf X,$$

т. е. разность верхней и нижней граней двух множеств (в данном случае одного и того же) равна верхней грани разности этих множеств (п. 4.3*). В самом деле, так как

$$M_k - m_k \underset{(23.5)}{=} \sup_{x \in \Delta_k} f(x) - \inf_{x \in \Delta_k} f(x) = \sup_{x',\, x \in \Delta_k} [f(x') - f(x)] = \omega_k(f),$$
$$k = 1, 2, \ldots, k_\tau,$$

то

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k. \quad \triangleleft$$

При заданной на отрезке $[a, b]$ ограниченной функции f верхние и нижние суммы Дарбу являются функциями, заданными на множестве $\{\tau\}$ всех разбиений отрезка $[a, b]$. Для таких функций можно определить их предел по аналогии с понятием предела интегральных сумм Римана.

Пусть на множестве $\{\tau\}$ всех разбиений τ отрезка $[a, b]$ задана функция $F\colon\ \tau \mapsto F(\tau) \in R$.

Определение 3. Число A назовем *пределом функции $F(\tau)$ при* $|\tau| \to 0$, если для любой последовательности $\{\tau_n\}$ разбиений τ_n отрезка $[a, b]$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} F(\tau_n) = A.$$

Если A — предел функции $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$, то пишут

$$\lim_{|\tau|\to 0} F(\tau) = A. \tag{23.17}$$

Определение предела (23.17) можно сформулировать и на "языке ε–δ".

Определение 4. Число A называется *пределом функции $F(x)$ при* $|\tau| \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ отрезка $[a, b]$, имеющих мелкость $|\tau| < \delta$, выполняется неравенство

$$|F(\tau) - A| < \varepsilon.$$

Поскольку определения предела (23.17) так же, как и определения предела интегральных сумм (23.1), могут быть сформулированы в терминах пределов последовательностей, то на эти пределы переносятся обычные свойства пределов, в частности возможность предельного перехода в неравенствах.

В смысле предела (23.17) мы и будем в дальнейшем говорить о пределах нижних и верхних сумм Дарбу: $\lim\limits_{|\tau|\to 0} s_\tau$ и $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S_\tau$.

23.4. Нижний и верхний интегралы. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим верхнюю грань I_* всевозможных ее нижних сумм Дарбу и нижнюю грань I^* всебозможных верхних сумм Дарбу:

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau. \tag{23.18}$$

Число I_* называется *нижним*, а число I^* — *верхним интегралом функции* f. Из неравенства (23.9) следует, что если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, то ее нижний и верхний интегралы конечны и для них выполняется неравенство

$$I_* \leqslant I^*. \tag{23.19}$$

▷ В самом деле, перейдя в левой части неравенства (23.9) к верхней грани по разбиениям τ_1, получим, что для любого разбиения τ_2 выполняется неравенство $I_* \leqslant S_{\tau_2}$. Перейдя здесь к нижней грани по τ_2, получим $I_* \leqslant I^*$. ◁

Интегралы I_* и I^* понадобятся нам ниже при доказательстве критерия интегрируемости функции.

23.5. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций.

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы разность верхних и нижних сумм Дарбу стремилась к нулю, когда мелкость разбиений отрезка стремится к нулю*:

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{23.20}$$

Следствие. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^{k_\tau}\omega_k(f)\Delta x_k = 0, \tag{23.21}$$

где $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ *— разбиение отрезка* $[a, b]$, *а* $\omega_k(f)$ *— колебание функции* f *на отрезке* $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$.

▷ Необходимость. Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на этом отрезке и $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тогда $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau = I$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$, имеющее мелкость $|\tau| < \delta$, и точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, для интегральной суммы $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, ..., \xi_{k_\tau})$ выполняется неравенство $|\sigma_\tau - I| < \varepsilon$, а следовательно, и неравенство

$$I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon. \tag{23.22}$$

Переходя в неравенстве (23.22) к нижней и верхней граням относительно точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{k_\tau}$, в силу свойств сумм Дарбу (23.14) и (23.15) получим

$$I - \varepsilon \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \varepsilon.$$

Таким образом, если $|\tau| < \delta$, то $0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant 2\varepsilon$. Отсюда сразу и следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Достаточность. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и для ее сумм Дарбу выполняется условие (23.20). Из определения

нижнего I_* и верхнего I^* интегралов (см. п. 23.4) и неравенства (23.19) имеем

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau. \tag{23.23}$$

Поэтому $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$. Отсюда в силу условия (23.20) следует, что $I^* - I_* = 0$. Обозначим общее значение нижнего и верхнего интегралов через I, т. е. $I = I_* = I^*$. Из (23.23) будем иметь $s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$, но любая интегральная сумма σ_τ также лежит между суммами Дарбу s_τ и S_τ (см. (23.8)): $s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$, поэтому $|\sigma_\tau - I| \leqslant S_\tau - s_\tau$. Отсюда в силу условия (23.20) следует, что $\lim\limits_{|\tau|\to 0} |\sigma_\tau - I| = 0$. Это означает, что существует предел интегральных сумм

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = I, \tag{23.24}$$

т. е. что функция f интегрируема, причем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = I. \quad \triangleleft \tag{23.25}$$

Следствие непосредственно вытекает из свойства (23.16) сумм Дарбу: условие (23.21) равносильно в силу указанного свойства условию (23.20).

Теорема 3. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а s_τ и S_τ — ее суммы Дарбу, то*

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{23.26}$$

$\triangleright$ Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то согласно теореме 2 выполняется условие (23.20). При доказательстве теоремы 2 было показано, что при выполнении этого условия верхний интеграл функции совпадает с ее нижним интегралом: $I_* = I^* = I$ (а поэтому в силу (23.23) $s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$), и что $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Следовательно, $0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau$, $0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau$. Отсюда в силу выполнения условия (23.20) следует, что $\lim\limits_{|\tau|\to 0} (I - s_\tau) = 0$ и $\lim\limits_{|\tau|\to 0} (S_\tau - I) = 0$. А это равносильно существованию пределов (23.26). $\triangleleft$

23.6. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.

Теорема 4. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.*

$\triangleright$ Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она, во-первых, ограничена на нем, а во-вторых, равномерно непрерывна. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех

точек $x \in [a,b]$ и $x' \in [a,b]$ таких, что $|x'-x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x')-f(x)| < \varepsilon$.

Возьмем для отрезка $[a,b]$ какое-либо разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ мелкости $|\tau| < \delta$. Тогда для любых двух точек x и x', принадлежащих одному и тому же отрезку разбиения τ, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $x' \in [x_{k-1}, x_k]$, имеет место неравенство $|x'-x| \leqslant x_k - x_{k-1} = \Delta x_k \leqslant |\tau| < \delta$, а поэтому и неравенство $|f(x')-f(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что колебание $\omega_k(f)$ функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_k(f) = \sup_{x,x' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x')-f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, ..., k_\tau. \tag{23.27}$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k \underset{(23.27)}{\leqslant} \varepsilon \sum_{k=1}^{k_\tau} \Delta x_k = \varepsilon(b-a). \tag{23.28}$$

Поскольку ε было произвольным положительным числом, то неравенство (23.28) означает, что $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$. Поэтому в силу следствия 1 теоремы 2 функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. ◁

Теорема 5. *Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на нем.*

▷ Пусть для определенности функция f возрастает на отрезке $[a,b]$. Тогда, в частности, для любого $x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b),$$

и, следовательно, функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Очевидно также, что в силу возрастания функции f для любого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a,b]$ имеют место равенства

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}),$$
$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k). \tag{23.29}$$

Поэтому, заметив, что

$$x_k - x_{k-1} = \Delta x_k \leqslant |\tau|, \quad k = 1, 2, ..., k_\tau, \tag{23.30}$$

и что $x_0 = a$, $x_{k_\tau} = b$, получим

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} (M_k - m_k)\Delta x_k \underset{(23.29)}{=} \sum_{k=1}^{k_\tau} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\Delta x_k \underset{(23.30)}{\leqslant}$$
$$\underset{(23.30)}{\leqslant} [(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + ...$$
$$... + (f(x_{k_\tau}) - f(x_{k_\tau - 1}))]|\tau| = [f(b) - f(a)]|\tau|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$, и потому, согласно теореме 2, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. ◁

Замечание. Отметим, что монотонные на отрезке функции могут быть и разрывными. Так, например, функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ монотонна и разрывна на любом отрезке, содержащем точку $x = 0$. Поскольку же всякая монотонная функция, в частности, $f(x) = \operatorname{sign} x$, согласно теореме 4, интегрируема, то отсюда следует, что существуют разрывные интегрируемые функции.

§ 24. Свойства интегрируемых функций

24.1. Основные свойства определенного интеграла. Перечислим свойства определенного интеграла, вытекающие непосредственно из того, что он является пределом интегральных сумм.

1°. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

▷ В данном случае подынтегральная функция тождественно равна 1, и потому при любом разбиении $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{j=j_\tau}$ все интегральные суммы Римана равны $b - a$:

$$\sigma_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} \Delta x_j = b - a,$$

следовательно,

$$\int\limits_a^b dx = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = b - a. \quad \triangleleft$$

2°. Линейность интеграла. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то при любых $\lambda \in R$ и $\mu \in R$ функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и*

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\, dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\, dx. \tag{24.1}$$

▷ Каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, будем иметь

$$\sigma_\tau(\lambda f + \mu g) = \sum_{k=1}^{k_\tau} [\lambda f(\xi_k) + \mu g(\xi_k)]\Delta x_k =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k + \mu \sum_{k=1}^{k_\tau} g(\xi_k)\Delta x_k = \lambda\sigma_\tau(f) + \mu\sigma_\tau(g). \tag{24.2}$$

Поскольку при $|\tau| \to 0$ предел правой части этого равенства в силу интегрируемости функций f и g существует, то существует при этом условии и предел левой части $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(\lambda f + \mu g)$, что означает интегрируемость функции $\lambda f + \mu g$. Перейдя в равенстве (24.2) к пределу при $|\tau| \to 0$, получим формулу (24.1). $\triangleleft$

3°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[a^*, b^*] \subset [a, b]$.*

$\triangleright$ Из интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ следует ее ограниченность на нем, а следовательно, и на отрезке $[a^*, b^*]$. Если $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{j=j_{\tau^*}}$ — какое-либо разбиение отрезка $[a^*, b^*]$, то всегда, добавив к нему соответствующее конечное множество точек, лежащих на отрезках $[a, b]$, но уже вне отрезка $[a^*, b^*]$, можно получить разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, $k_\tau \geqslant j_{\tau^*}$, отрезка $[a, b]$ той же мелкости

$$|\tau| = |\tau^*|. \tag{24.3}$$

Обозначив посредством $\omega_k(f)$ и $\omega_j^*(f)$ колебания функции f соответственно на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$ и $[x_{j-1}^*, x_j^*]$ и заметив, что $\sum\limits_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k$ отличается от $\sum\limits_{j=1}^{j_{\tau^*}} \omega_j^*(f)\Delta x_j^*$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta x_j^* = x_j^* = x_j^* - x_{j-1}^*$, на неотрицательные слагаемые вида $\omega_k(f)\Delta x_k$, соответствующие отрезкам $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения τ, лежащим вне отрезка $[a^*, b^*]$, получим

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{j_{\tau^*}} \omega_j^*(f)\Delta x_j^* \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k. \tag{24.4}$$

Из интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$, согласно следствию 1 теоремы 2 из п. 23.5, вытекает, что $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$, поэтому в силу (24.3) и (24.4) $\lim\limits_{|\tau^*|\to 0} \sum\limits_{j=1}^{j_{\tau^*}} \omega_j^*(f)\Delta x_j^* = 0$, а это, согласно тому же следствию теоремы 2 п. 23.5, и означает интегрируемость функции f на отрезке $[a^*, b^*]$. $\triangleleft$

4°. Аддитивность интеграла. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{24.5}$$

$\triangleright$ Если τ_a^c и τ_c^b — разбиения соответственно отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, то объединение этих разбиений $\tau = \tau_a^c \cup \tau_c^b$ является разбиением отрезка $[a,b]$, причем

$$|\tau_a^c| \leqslant |\tau|, \quad |\tau_c^b| \leqslant |\tau|. \tag{24.6}$$

Пусть $\sigma_{\tau_a^c}$ и $\sigma_{\tau_c^b}$ — какие-либо интегральные суммы Римана функции f, соответствующие разбиениям τ_a^c и τ_c^b; тогда

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau_a^c} + \sigma_{\tau_c^b} \tag{24.7}$$

— интегральная сумма Римана функции f на отрезке $[a,b]$.

Согласно свойству 2° из интегрируемости функции f на отрезке $[a,b]$ следует ее интегрируемость на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. Следовательно, интегральные суммы σ_τ, $\sigma_{\tau_a^c}$ и $\sigma_{\tau_c^b}$ при условии, что мелкости разбиений τ, τ_a^c и τ_c^b стремятся к нулю, имеют конечные пределы — интегралы от функции по указанным отрезкам:

$$\lim_{|\tau_a^c|\to 0} \sigma_{\tau_a^c} = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \lim_{|\tau_c^b|\to 0} \sigma_{\tau_c^b} = \int_c^b f(x)\,dx, \quad \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (24.7) при условии $|\tau| \to 0$ (при этом в силу (24.6) $|\tau_a^c| \to 0$ и $|\tau_c^b \to 0$), получим формулу (24.5). $\triangleleft$

Замечание 1. В силу определения интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \leqslant a$ (см. п. 23.1) формула (24.5) остается в силе и при $c \geqslant b$, если только функция f интегрируема на отрезке $[a,c]$.

$\triangleright$ В самом деле, если $c \geqslant b$, то по доказанному $\int\limits_a^b + \int\limits_b^c = \int\limits_a^c$ и, следовательно, $\int\limits_a^b = \int\limits_a^c - \int\limits_b^c = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$. $\triangleleft$

Замечание 2. Если функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$, а следовательно, для нее в силу свойства 3° имеет место формула (24.5).

$\triangleright$ Действительно, если функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она ограничена на них, а поэтому ограничена и на отрезке $[a,b]$. Далее, всякое разбиение τ отрезка $[a,b]$, не содержащее точки $x = c$, добавлением этой точки превращается в разбиение τ', которое является объединением разбиений отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$. Если точка $x = c$ входит в разбиение τ, то положим $\tau' = \tau$. Тогда $|\tau'| \leqslant |\tau|$. Рассмотрим такие интегральные суммы σ_τ и $\sigma_{\tau'}$, что у них на отрезках разбиений τ и τ', не содержащих точки $x = c$, выбраны одинаковые точки, в которых берутся значения функции f. Эти суммы

отличаются друг от друга не более чем на три слагаемых. Поэтому, если $|f(x)| \leqslant M$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$|\sigma_\tau - \sigma_{\tau'}| \leqslant 3M|\tau| \to 0 \quad \text{при} \quad |\tau| \to 0.$$

А так как существует предел

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_{\tau'} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

то существует и равный ему предел

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau,$$

т. е. функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\triangleleft$

Замечание 3. Из свойства аддитивности интеграла и из теоремы 4 п. 23.6 следует интегрируемость так называемых кусочно непрерывных на отрезке функций.

Функция называется *кусочно непрерывной на отрезке*, если она имеет на нем только конечное множество точек разрыва, и притом только первого рода. На концах отрезка функция может быть не определена.

Таким образом, функция f кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$, если найдется такое разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ этого отрезка, что для всех $k = 1, 2, ..., k_\tau$ существуют конечные пределы $f(x_{k-1} + 0)$ и $f(x_k - 0)$. В точках x_k, $k = 0, 1, 2, ..., k_\tau$, функция f может быть определена или не определена.

Если положить

$$f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x_{k-1} + 0) & \text{при} \quad x = x_{k-1}, \\ f(x) & \text{при} \quad x_{k-1} < x < x_k, \\ f(x_k - 0) & \text{при} \quad x = x_k, \end{cases}$$

то функция f_k будет непрерывна, а поэтому, согласно теореме 4 п. 23.6, и интегрируема на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$.

Отсюда следует интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$ (значения функции f в тех точках x_k, в которых она не определена, можно задавать произвольно: это не влияет ни на существование, ни на значение интеграла) и справедливость формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{k_\tau} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\,dx.$$

5°. Интегрируемость произведения интегрируемых функций. *Если функции f и g интегрируемы на некотором отрезке, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке.*

$\triangleright$ Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то они на нем

ограничены, т. е. существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |g(x)| \leqslant A, \tag{24.8}$$

а следовательно, и $|f(x)g(x)| \leqslant A^2$, т. е. произведение fg ограничено на отрезке $[a, b]$. Проверим для него выполнимость критерия (23.21) интегрируемости функций. Из тождества

$$f(x')g(x') - f(x)g(x) = [f(x') - f(x)]g(x') + [g(x') - g(x)]f(x),$$
$$x \in [a, b], \quad x' \in [a, b],$$

имеем

$$|f(x')g(x') - f(x)g(x)| \leqslant |f(x') - f(x)||g(x')| + |g(x') - g(x)||f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant A[|f(x') - f(x)| + |g(x') - g(x)|]. \tag{24.9}$$

Если $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, то, выбирая точки x и x' в одном и том же отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ этого разбиения и переходя в неравенстве (24.9) к верхним граням по всевозможным $x \in [x_{k-1}, x_k]$ и $x' \in [x_{k-1}, x_k]$, получим

$$\omega_k(fg) \leqslant A[\omega_k(f) + \omega_k(g)], \quad k = 1, 2, ..., k_\tau;$$

здесь $\omega_k(\cdot)$, как обычно, — колебание соответствующей функции на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(fg)\Delta x_k \leqslant A\Big[\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(g)\Delta x_k\Big]. \tag{24.10}$$

В силу интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ имеем (см. (23.21))

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega(f)\Delta x_k = \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(g)\Delta x_k = 0.$$

Поэтому из неравенства (24.10) следует, что $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(fg)\Delta x_k = 0$, откуда в силу того же критерия (23.21) и вытекает интегрируемость произведения fg. ◁

6°. Интегрирование частного интегрируемых функций. *Если функции f и g интегрируемы на некотором отрезке и абсолютная величина функции g ограничена на нем снизу положительной постоянной, то частное $\dfrac{f}{g}$ также интегрируемо на этом отрезке.*

▷ Покажем, что при сделанных предположениях функция $\dfrac{1}{g}$ интегрируема. Пусть функция g интегрируема на отрезке $[a, b]$ и существует такая постоянная $c > 0$, что для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется

неравенство $|g(x)| \geqslant c$. Тогда для любых точек $x, x' \in [a,b]$ имеем

$$\left|\frac{1}{g(x')} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x)-g(x')|}{|g(x')||g(x)|} \leqslant \frac{1}{c^2}\,|g(x)-g(x')|.$$

Если $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$ и точки x, x' содержатся в одном и том же отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, разбиения τ, то переходя к верхним граням в полученном неравенстве, будем иметь

$$\omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{1}{c^2}\,\omega_k(g).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k\left(\frac{1}{g}\right)\Delta x_k \leqslant \frac{1}{c^2}\sum_{k=0}^{k_\tau} \omega_k(g)\Delta x_k.$$

В силу интегрируемости функции g правая часть неравенства стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Поэтому стремится к нулю и его левая часть. Это означает интегрируемость функции $\dfrac{1}{g}$ на отрезке $[a,b]$. Если функция f также интегрируема на этом отрезке, то частное $\dfrac{f}{g}$, будучи произведением интегрируемых функций f и $\dfrac{1}{g}$, согласно свойству 5° также интегрируемо. ◁

7°. Интегрирование неравенств. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и*

$$f(x) \geqslant g(x), \quad x \in [a,b], \tag{24.11}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{24.12}$$

В частности, если $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{24.13}$$

▷ Из неравенства (24.11) следует, что для любых интегральных сумм $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(g)$ соответственно функций f и g выполняется неравенство

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k \geqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_\tau(g), \tag{24.14}$$

ибо $f(\xi_k) \underset{(24.11)}{\geqslant} g(\xi_k)$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$. Переходя в неравенстве (24.14) к пределу при $|\tau| \to 0$, получим неравенство (24.12).

Неравенство (24.13) следует из неравенства (24.12) при $g(x) \equiv 0$. ◁

8°. *Если функция f интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, существует точка $x_0 \in [a,b]$, в которой функция f непрерывна, и $f(x_0) > 0$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0.$$

$\triangleright$ Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$ и $f(x_0) > 0$, то из очевидного неравенства $f(x_0) > \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ согласно "лемме о сохранении знака" (см. следствие из следствия 2° в п. 6.7) следует, что существует такой отрезок $[\alpha,\beta]$, что $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\alpha < \beta$, и для всех точек $x \in [\alpha,\beta]$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}, \tag{24.15}$$

а тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \underset{(24.3)}{=} \int\limits_a^\alpha f(x)\,dx + \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int\limits_\beta^b f(x)\,dx \underset{(24.13)}{\geqslant}$$
$$\underset{(24.13)}{\geqslant} \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx \underset{\substack{(24.12)\\(24.15)}}{\geqslant} \int\limits_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2}\,dx \underset{(24.1)}{=} \frac{f(x_0)}{2}\int\limits_\alpha^\beta dx = \frac{1}{2}\,f(x_0)(\beta-\alpha) > 0. \triangleleft$$

9°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{24.16}$$

$\triangleright$ Прежде всего из интегрируемости функции f следует ее ограниченность, а следовательно, и ограниченность функции $|f|$. Покажем, что для функции $|f|$ выполняется критерий интегрируемости (23.21).

Заметив, что для любых двух точек $x \in [a,b]$ и $x' \in [a,b]$ справедливо неравенство

$$||f(x')| - |f(x)|| \leqslant |f(x') - f(x)|, \tag{24.17}$$

рассмотрим какое-либо разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a,b]$. Тогда, выбирая точки x и x' из одного и того же отрезка $[x_{k-1},x_k]$ этого разбиения, $x \in [x_{k-1},x_k]$, $x' \in [x_{k-1},x_k]$, и переходя в обеих частях неравенства (24.17) к верхним граням, будем иметь

$$\omega_k(|f|) = \sup_{x,\,x' \in [x_{k-1},x_k]} ||f(x')| - |f(x)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x,\,x' \in [x_{k-1},x_k]} |f(x') - f(x)| = \omega_k(f),$$

где $\omega_k(|f|)$ и $\omega_k(f)$ — колебания соответственно функций $|f|$ и f на отрезке $[x_{k-1},x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$. Поэтому

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{k_\tau} \omega_k(|f|)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k,$$

а поскольку, согласно уже упоминавшемуся критерию интегрируемости (23.21), для интегрируемой функции f выполняется условие $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{k_\tau}\omega_k(f)\Delta x_k = 0$, то и $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{k_\tau}\omega_k(|f|)\Delta x_k = 0$, откуда и следует интегрируемость функции $|f|$.

Если теперь $\sigma_\tau(f) = \sum\limits_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$, т. е. $\sigma_\tau(f)$ — интегральная сумма Римана функции f, то

$$|\sigma_\tau(f)| = \left|\sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} |f(\xi_k)|\Delta x_k = \sigma_\tau(|f|), \tag{24.18}$$

где в правой части неравенства стоит интегральная сумма Римана функции $|f|$. Так как $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau(|f|) = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, то, перейдя в неравенстве (24.18) к пределу при $|\tau| \to 0$, получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad \lhd$$

Заметим, что если не предполагать, что $a < b$ (см. п. 23.1), то вместо неравенства (24.16) следует писать

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \tag{24.19}$$

10°. Непрерывность интеграла. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функции*

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt, \tag{24.20}$$

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^b f(t)\,dt \tag{24.21}$$

непрерывны на этом отрезке.

Следствие. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad 0 < \varepsilon < b - a. \tag{24.22}$$

$\rhd$ Функция f, будучи интегрируемой на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем, поэтому существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c. \tag{24.23}$$

Представим интеграл $\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$ в виде суммы (см. (24.3)):

$$\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int\limits_a^{x} f(t)\,dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt \tag{24.24}$$

(отметим, что это равенство верно как при $\Delta x \geqslant 0$, так и при $\Delta x < 0$, лишь бы $x \in [a,b]$ и $x + \Delta x \in [a,b]$). Теперь видно, что приращение $\Delta F(x)$ функции $F(x)$ (см. (24.20)) можно записать в виде

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) \underset{(24.20)}{=} \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt \underset{(24.24)}{=}$$

$$\underset{(24.24)}{=} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{24.25}$$

Поэтому

$$|\Delta F(x)| = \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \underset{(24.19)}{\leqslant} \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \underset{(24.23)}{\leqslant} c\left|\int\limits_x^{x+\Delta x} dt\right| = c\,|\Delta x|.$$

Отсюда, очевидно, сразу следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta F(x) = 0$, т. е. непрерывность функции $F(x)$.

Непрерывность функции $G(x)$ следует из непрерывности функции $F(x)$. В самом деле, поскольку $\int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_x^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(t)\,dt$, т. е. $F(x) + G(x) = \int\limits_a^b f(t)\,dt$, то

$$G(x) = \int\limits_a^b f(t)\,dt - F(x), \tag{24.26}$$

а так как интеграл $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ — постоянная величина, то непрерывность функции F влечет за собой непрерывность функции G. ◁

Свойство непрерывности функции F называется *непрерывностью интеграла* $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ *по верхнему пределу интегрирования*, соответственно свойство непрерывности функции G — *непрерывностью интеграла по нижнему пределу интегрирования.*

▷ Для того чтобы убедиться в справедливости равенства (24.22), выберем какую-либо точку $c \in (a,b)$, тогда функции $\int\limits_x^c f(t)\,dt$ и $\int\limits_c^x f(t)\,dt$ в силу свойства 9° непрерывны соответственно в точках $x = a$ и

$x = b$, поэтому при $0 < \varepsilon < b - a$ будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \underset{(24.3)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\Big] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \underset{\text{св. } 9^\circ}{=} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \underset{(24.3)}{=}$$

$$\underset{(24.3)}{=} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \quad \triangleleft$$

24.2. Интегральная теорема о среднем.

Теорема. *Пусть на отрезке* $[a, b]$:

1) *функции* f *и* g *интегрируемы*;

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M$; (24.27)

3) *функция* g *не меняет знака.*

Тогда существует такое число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{24.28}$$

Следствие. *Если в дополнение к условиям теоремы функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то на интервале* (a, b) *существует такая точка* ξ, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx, \quad a < \xi < b, \tag{24.29}$$

в частности, при $g(x) \equiv 1$ *на* $[a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b$$

(рис. 103).

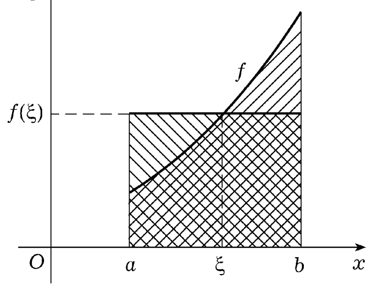


Рис. 103

$\triangleright$ Умножив неравенство (24.27) на $g(x)$, получим, что для всех $x \in [a, b]$ в случае $g(x) \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

а в случае $g(x) \leqslant 0$ — неравенство

$$mg(x) \geqslant f(x)g(x) \geqslant Mg(x).$$

Интегрируя эти неравенства, будем иметь

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx, \tag{24.30}$$

или соответственно

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{24.31}$$

Если

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0, \tag{24.32}$$

то как в первом, так и во втором случае

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \tag{24.33}$$

и, следовательно, равенство (24.28) верно при любом μ, так как обе его части, согласно (24.32) и (24.33), обращаются в нуль.

Если же $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то при $g(x) \geqslant 0$ имеем $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, а при $g(x) \leqslant 0$ — соответственно $\int_a^b g(x)\,dx < 0$.

Поделив обе части неравенств (24.30) и (24.31) на интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$, в обоих случаях получим одно и то же неравенство

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{24.34}$$

Определим число μ равенством

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \tag{24.35}$$

тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx$, причем в силу (24.34) и (24.35) выполняется неравенство $m \leqslant \mu \leqslant M$. ◁

Докажем следствие.

▷ Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то согласно теореме Вейерштрасса она достигает своих наибольшего и наименьшего значений в некоторых точках α и β этого отрезка:

$$f(\alpha) = \min_{[a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f(x). \tag{24.36}$$

При
$$m = f(\alpha), \quad M = f(\beta) \tag{24.37}$$
выполняется условие (24.27) теоремы и, следовательно, существует такое число μ,
$$m \leqslant \mu \leqslant M, \tag{24.38}$$
для которого выполняется равенство (24.28).

В силу условий (24.37), (24.38), согласно теореме Больцано–Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, на отрезке $[a, b]$ существует точка ξ, для которой имеет место равенство $f(\xi) = \mu$, а поэтому и равенство (24.29). Покажем, что, более того, точку ξ всегда можно выбрать так, что она будет лежать на интервале (a, b).

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то из формулы (24.28) следует $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, поэтому равенство (24.29) выполняется при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$.

Пусть теперь
$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0, \tag{24.39}$$
и для определенности $g(x) \geqslant 0$ во всех точках x отрезка $[a, b]$, а следовательно,
$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \geqslant 0 \tag{24.40}$$
(случай $g(x) \leqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, сводится к рассматриваемому заменой функции $g(x)$ на функцию $-g(x)$: применив к неотрицательной функции $g(x)$ формулу (24.29) и умножив обе части равенства на -1, получим и в этом случае формулу (24.29)).

Из выполнения условий (24.39) и (24.40) следует, что
$$\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0. \tag{24.41}$$

В силу неравенства (24.38) возможны три случая: $m < \mu < M$, $\mu = M$ и $\mu = m$. Если $m < \mu < M$, то из условий (24.37) согласно теореме Больцано–Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции следует, что между точками α и β, а следовательно, на интервале (a, b) существует такая точка ξ, что $f(\xi) = \mu$.

Если же $\mu = M$, то равенство (24.28) примет вид
$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = M\int\limits_a^b g(x)\,dx,$$
откуда
$$\int\limits_a^b (M - f(x))g(x)\,dx = 0. \tag{24.42}$$

Из неравенства (24.41) в силу следствия из свойства 10° определенного интеграла (см. п. 24.1) существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx > 0. \tag{24.43}$$

Если бы на интервале (a, b) не существовала точка ξ, в которой $f(\xi) = M$, то непрерывная функция $M - f(x)$ была бы положительной во всех точках отрезка $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, а следовательно, и в точке $x_0 \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, в которой она принимает наименьшее значение на этом отрезке; т. е., если

$$M - f(x_0) = \min_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} (M - f(x)), \tag{24.44}$$

то

$$M - f(x_0) > 0. \tag{24.45}$$

Поэтому

$$\int_a^b (M - f(x))g(x)\,dx \geqslant \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (M - f(x))g(x)\,dx \underset{(24.44)}{\geqslant}$$
$$\underset{(24.44)}{\geqslant} (M - f(x_0)) \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx \underset{\substack{(24.43)\\(24.45)}}{>} 0,$$

что противоречит равенству (24.42). А это означает, что на интервале (a, b) существует такая точка ξ, что $\mu = M = f(\xi)$.

Случай $\mu = m$ рассматривается аналогично. $\triangleleft$

§ 25. Определенный и неопределенный интегралы

25.1. Дифференцирование определенного интеграла по пределам интегрирования. При изучении свойств интеграла была установлена (см. свойство 10° в п. 24.1) его непрерывность по пределам интегрирования, т. е. непрерывность функций

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

на отрезке $[a, b]$. Оказывается, что с “улучшением” свойств подынтегральной функции f “улучшаются” и свойства функций F и G. Так, например, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то будет показано, что функции F и G являются уже дифференцируемыми.

Докажем даже более точную теорему о дифференцируемости функции F в точке x_0.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в этой точке и*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{25.1}$$

Следствие. *Всякая непрерывная на отрезке функция имеет на нем первообразную.*

▷ Используя представление приращения $\Delta F(x_0)$ в виде (см. (24.25))

$$\Delta F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt, \quad x_0 \in [a,b], \quad x_0+\Delta x \in [a,b],$$

и тождество $\dfrac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$, будем иметь

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{f(x_0)}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t)-f(x_0)]\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)-f(x_0)|\,dt\right|. \tag{25.2}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta > 0$, что если $|t - x_0| < \delta$ и $t \in [a,b]$, то

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{25.3}$$

Пусть Δx таково, что $|\Delta x| < \delta$; тогда для всех значений t, принадлежащих отрезку с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$ (по которому ведется интегрирование в неравенстве (25.2)), будем иметь $|t - x_0| \leqslant |\Delta x| < \delta$ и, следовательно,

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{25.4}$$

Поэтому

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \underset{(25.2)}{\leqslant} \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)-f(x_0)|\,dt\right| \underset{(25.4)}{\leqslant}$$

$$\underset{(25.4)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon.$$

Это, согласно определению предела, и означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$, и, таким образом, формула (25.1) доказана. ◁

Для доказательства следствия достаточно заметить, что равенство (25.1) в случае непрерывной на отрезке функции имеет место во всех точках этого отрезка.

Замечание. Из доказанного следует, что в условиях теоремы 1 функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

также имеет производную в точке x_0 и

$$G'(x_0) = -f(x_0). \tag{25.5}$$

Это сразу следует из формулы (25.1), ибо (см. (24.26))

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

и $\int_a^b f(t)\,dt$ — постоянная величина.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для каждой его точки x справедливы формулы

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x). \tag{25.6}$$

25.2. Существование первообразной.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна во всех точках некоторого промежутка Δ, то на этом промежутке у нее существует первообразная; при этом если x_0 — какая-либо точка рассматриваемого промежутка Δ, то функция*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \quad x \in \Delta, \tag{25.7}$$

является одной из первообразных функций f на промежутке Δ.

$\triangleright$ Достаточно проверить, что функция (25.7) действительно является первообразной функции f. Если $x > x_0$, $x \in \Delta$, то равенство $F'(x) = f(x)$ сразу следует из теоремы 1. Если же $x < x_0$, $x \in \Delta$, то

$$F'(x) \underset{(25.7)}{=} \frac{d}{dx}\int_{x_0}^x f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_x^{x_0} f(t)\,dt \underset{(25.6)}{=} -(-f(x)) = f(x). \quad \triangleleft$$

Замечание 1. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором промежутке Δ функции f составляет неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$, $x \in \Delta$, а определенный интеграл $\int_{x_0}^x f(t)\,dt$, $x_0 \in \Delta$, $x \in \Delta$, является одной из первообразных функции f на Δ. Поскольку две любые первообразные отличаются на постоянную, то

$$\int f(x)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt + C, \tag{25.8}$$

где C — произвольная постоянная. Так выглядит связь между неопределенным и определенным интегралами. Из теоремы 2 следует, что у всякой непрерывной на некотором промежутке функции существует на этом промежутке неопределенный интеграл.

Теорема 3 (основная теорема интегрального исчисления). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, какова бы ни была на этом отрезке ее первообразная Φ, справедлива формула*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{25.9}$$

называемая формулой Ньютона–Лейбница.

▷ По теореме 2 функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции f на отрезке $[a, b]$. Если Φ — какая-либо первообразная на $[a, b]$ той же функции f, то они отличаются на постоянную, т. е. существует такая постоянная C, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C. \tag{25.10}$$

Положив здесь $x = a$ и вспомнив, что $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, получим $C = -\Phi(a)$. Подставив это значение в формулу (25.10), будем иметь

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a), \quad x \in [a, b].$$

Формула (25.9) получается отсюда при $x = b$. ◁

Отметим, что формула Ньютона–Лейбница (25.9) справедлива и для $a > b$. Действительно, если в ней поменять местами a и b, то обе части равенства (25.9) изменят знак на противоположный.

Замечание 2. В формуле (25.9) $\Phi'(t) = f(t)$. Поэтому ее можно записать в виде

$$\int_a^b \Phi'(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{25.11}$$

т. е. интеграл от непрерывной производной равен разности значений самой функции на концах отрезка, по которому производится интегрирование.

Замечание 3. С помощью формулы (25.11) нетрудно показать, что формула Ньютона–Лейбница (25.9) остается верной и в случае, когда функция Φ непрерывна, а ее производная f кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$ (см. замечание 3 в п. 24.1), а равенство $\Phi'(x) = f(x)$ выполняется во всех точках непрерывности функции f.

Примером непрерывной первообразной кусочно непрерывной функции f является, например (см. теорему 1), функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Примеры. 1. Вычислить значение интеграла $\int\limits_0^1 x^3\,dx$. Поскольку $\int x^3\,dx = \dfrac{x^4}{4} + C$, то по формуле Ньютона–Лейбница получим

$$\int\limits_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2. Найдем значение интеграла $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$. Имеем

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

§ 26. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле

26.1. Формула замены переменной. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ_x, а функция $\varphi(t)$ — на промежутке Δ_t и $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогда имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, т. е. сложная функция $f(\varphi(x))$.

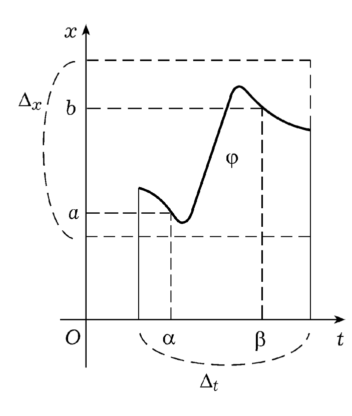


Рис. 104

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ_x, а функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на промежутке Δ_t, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \qquad (26.1)$$

где

$$\alpha \in \Delta_t, \quad \beta \in \Delta_t, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$$

(рис. 104).

Формула (26.1) называется *формулой замены переменной* в определенном интеграле.

$\triangleright$ Пусть $F(x)$ — какая-либо перво образная для функции $f(x)$ на промежутке Δ_x; тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для

функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на промежутке Δ_t, ибо

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Поэтому по теореме Ньютона–Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \lhd$$

26.2. Формула интегрирования по частям.

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{26.2}$$

Формула (26.2) называется *формулой интегрирования по частям* для определенного интеграла.

$\rhd$ Имеем

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du. \tag{26.3}$$

Все интегралы в (26.3) существуют, поскольку подынтегральные функции непрерывны. Для интеграла в левой части равенства, согласно формуле Ньютона–Лейбница, имеем

$$\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b.$$

Подставив выражение, стоящее в правой части последнего равенства, в (26.3), получим

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = uv\Big|_a^b,$$

что равносильно (26.2). $\lhd$

Замечание. Можно доказать, что формула интегрирования по частям (26.2) остается верной и в том случае, когда функции u и v непрерывны, а их производные кусочно непрерывны (см. п. 24.1).

Примеры. 1. Применим формулу интегрирования по частям для вычисления интеграла $\int_1^2 \ln x\,dx$:

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Приведем пример интеграла, при вычислении которого применим и замену переменной, и интегрирование по частям. Вычислим интеграл $I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$.

Сделав сначала замену переменной $t = \cos x$, а затем проинтегрировав по частям, получим

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_{-1}^{1} t\, \frac{t\, dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} t\, d\sqrt{1+t^2} =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + t\sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = 2\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} - I.$$

Из получившегося относительно I уравнения находим

$$I = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

Заметим, рассмотренный интеграл можно вычислить, и применяя только замену переменной. Для этого можно воспользоваться, например, уже вычисленным неопределенным интегралом $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ (пример в п. 19.4).

3*. Покажем, что для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases} \tag{26.4}$$

Под $n!!$, $n \in N$, понимается произведение всех натуральных чисел, не превышающих n и имеющих ту же четность, что и число n:

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot 2n,$$

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1).$$

По определению $0!! = 1$.

Положив для удобства $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ и проинтегрировав по частям интеграл I_n при $n \geqslant 2$, имеем

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{26.5}$$

Заметим, что

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 1. \tag{26.6}$$

Поэтому при $n = 2k+1$, т. е. при нечетном n,

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \tag{26.7}$$

а при $n = 2k$, т. е. при четном n,

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}. \tag{26.8}$$

Равенство интегралов $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ сразу получается с помощью замены переменных $x = \frac{\pi}{2} - t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, формулы (26.4) доказаны. Из них легко получается формула Валлиса*)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2. \tag{26.9}$$

В самом деле, проинтегрировав по отрезку $[0, \pi/2]$ неравенства

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\, dx,$$

т. е.

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1}. \tag{26.10}$$

Отсюда в силу формул (26.4) имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}. \tag{26.11}$$

Если ввести обозначения

$$x_n = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2, \qquad y_n = \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2, \tag{26.12}$$

то неравенства (26.11) можно записать в виде

$$x_n \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant y_n, \tag{26.13}$$

*) Дж. Валлис (1616–1703) — английский математик.

где

$$y_n - x_n \underset{(26.12)}{=} \frac{1}{2n}\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{2n}\,x_n \underset{(26.13)}{\leqslant}$$

$$\underset{(26.13)}{\leqslant} \frac{1}{2n}\,\frac{\pi}{2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, т. е. длины отрезков $[x_n, y_n]$, содержащих точку $\pi/2$, стремятся к нулю, а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi}{2}.$$

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$ в силу первой формулы (26.12) и представляет собой формулу Валлиса.

§ 27. Площади и объемы

27.1. Понятие площади плоского множества. Проведем на координатной плоскости x, y для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ всевозможные прямые

$$x = 10^{-k}p, \quad y = 10^{-k}q, \quad p \in Z, \quad q \in Z.$$

В результате при фиксированном k получим разбиение плоскости на замкнутые квадраты $\{(x, y)\colon\ 10^{-k}p \leqslant x \leqslant 10^{-k}(p+1),\quad 10^{-k}q \leqslant y \leqslant 10^{-k}(q+1)\}$ со сторонами длины 10^{-k}. Квадраты, из которых состоит это разбиение, будем называть *квадратами ранга* k. Очевидно, что каждый квадрат ранга k состоит из 100 равных квадратов ранга $k+1$.

Пусть X — множество на плоскости x, y. Обозначим через $s_k = s_k(X)$ объединение всех квадратов ранга k, содержащихся в множестве X. Все квадраты ранга $k+1$, которые получаются разбиением квадратов ранга k, содержащихся в s_k, заведомо принадлежат s_{k+1}. Поэтому при переходе от k и $k+1$ множество s_k может только увеличиться за счет тех квадратов ранга $k+1$, которые содержатся в X, но не содержатся в квадратах ранга k, принадлежащих s_k. Таким образом,

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset \ldots \subset X. \tag{27.1}$$

Каждое s_k состоит из конечного или бесконечного множества квадратов ранга k. Если их конечное множество, то через μs_k обозначим площадь многоугольника s_k. Если же s_k состоит из бесконечного множества квадратов ранга k, то s_k не может иметь конечной площади. В этом случае будем писать $\mu s_k = +\infty$.

Очевидно, что если некоторое множество s_k состоит из бесконечного множества квадратов ранга k, то и для всех $k' > k$ множества $s_{k'}$ также состоят из бесконечного множества квадратов ранга k', так как

уже тех квадратов ранга k', которые содержатся в квадратах ранга k, принадлежащих s_k, будет бесконечно много. Поэтому если $\mu s_k = +\infty$, то и для всех $k' > k$ имеет место $\mu s_{k'} = +\infty$.

Из включений (27.1) следует, что

$$\mu s_0 \leqslant \mu s_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \ldots, \tag{27.2}$$

иначе говоря, последовательность $\{\mu s_k\}$ точек, вообще говоря, расширенной числовой прямой $\overline{R}$ возрастает и потому имеет конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \mu s_k$, называемый *площадью* или *мерой множества* X и обозначаемый μX. Таким образом,

$$\mu X \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu s_k(X). \tag{27.3}$$

Согласно этому определению каждое множество на плоскости имеет конечную или бесконечную площадь. Площадь всякого ограниченного множества конечна. В самом деле, если множество X ограничено, то оно содержится в некотором многоугольнике S_0, состоящем из конечного числа квадратов нулевого ранга и имеющем поэтому конечную площадь. В силу этого при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ $s_k(X) \subset \subset X \subset S_0$ и, следовательно, $\mu s_k(X) \leqslant \mu S_0 < +\infty$, т. е. последовательность $\{(\mu s_k(X)\}$ ограничена сверху, а поэтому имеет конечный предел.

Иногда меру μX называют *внутренней мерой множества* X по причинам, которые будут ясны из дальнейшего.

Из курса элементарной математики известно, что если множество X является многоугольником, замкнутым или открытым (т. е. включающим ограничивающую его ломаную или нет), кругом, его сектором или сегментом, то площади совпадают с определенными нами площадями μX.

Теорема 1. *Если X_1 и X_2 — подмножества координатной плоскости переменных x, y и $X_1 \subset X_2$, то*

$$\mu X_1 \leqslant \mu X_2. \tag{27.4}$$

$\triangleright$ Если $s_k(X_1)$ и $s_k(X_2)$ — совокупность всех квадратов ранга k, содержащихся соответственно в множествах X_1 и X_2, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то из условия $X_1 \subset X_2$, очевидно, следует, что $s_k(X_1) \subset s_k(X_2)$, а потому $\mu s_k(X_1) \leqslant \mu s_k(X_2)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим неравенство (27.4). $\triangleleft$

27.2*. Пример неограниченного множества положительной конечной площади. Всякое ограниченное множество, как это было показано выше, имеет конечную площадь. Однако существуют и неограниченные множества с конечной площадью. Примером неограниченного множества нулевой площади является прямая. Приведем пример неограниченного множества с положительной конечной пло-

щадью. Этот пример был построен еще в XIV веке французским математиком Н. Оресмом*).

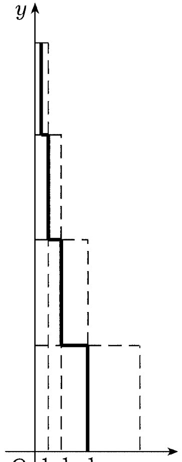


Рис. 105

На координатной плоскости переменных x и y рассмотрим квадрат

$$Q = \{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Его правую половину, т. е. его часть, для точек которой выполняется неравенство $x \geqslant 1/2$, переместим так, что она займет положение прямоугольника

$$Q_1 = \big\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2\big\}$$

(т. е. "поставим" правую половину квадрата Q на его левую половину; рис. 105). Далее, правую половину прямоугольника Q_1, т. е. его часть, для точек которой выполняется неравенство $x \geqslant 1/4$, переместим так, что она займет положение прямоугольника

$$Q_2 = \big\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1/4, \quad 2 \leqslant y \leqslant 3\big\}$$

(т. е. снова "поставим" правую половину на левую) и так далее.

Продолжая этот процесс, получим неограниченную фигуру P ("башню"), являющуюся объединением левой половины Q и правых половин прямоугольников Q, Q_1, Q_2, ..., поставленных друг на друга и на левую половину квадрата Q. Указанные части, составляющие фигуру P, представляют собой прямоугольники, равновеликие прямоугольникам, лежащим в квадрате, площади которых образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ..., сумма которой равна 1, т. е. площади квадрата Q: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$. Естественно, что площадь бесконечной фигуры P равна (как это можно доказать) площади квадрата Q, т. е. положительной конечной величине.

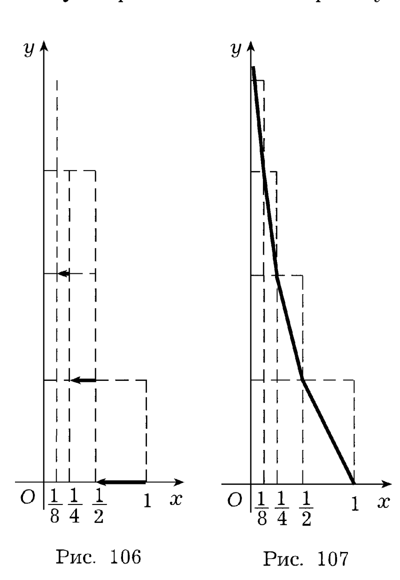


Рис. 106 Рис. 107

Заметим, что бесконечная фигура P лежит над осью x и под графиком "ступенчатой" (кусочно постоянной) функции, изображенной на рис. 106.

Нетрудно получить и бесконечное множество конечной площади, ограниченное графиком непрерывной на полуинтервале $(0, 1]$ функции, положительной полуосью оси y, отрезком $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$, оси x. Чтобы получить график такой функции, достаточно, например, соединить прямолинейными отрезками правые концы ступенек графика функции, изображенной на рис. 106. В результате получится функция, график которой изображен на рис. 107.

Отметим, что эта функция, будучи неограниченной, неинтегрируема по Риману.

27.3. Понятие объема. Пусть в трехмерном пространстве R^3 фиксирована декартова прямоугольная система координат x, y, z. Аналогично разбиению плоскости на квадраты ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$ можно произвести разбиение пространства R^3 на кубы с помощью плоскостей, параллельных координатным плоскостям и отстоящих последовательно друг от друга на расстояние 10^{-k}, точнее, с помощью плоскостей $x = 10^{-k}p$, $y = 10^{-k}q$, $z = 10^{-k}r$, $p, q, r \in Z$, т. е. на кубы

$$\{(x, y, z):\ 10^{-k}p \leqslant x \leqslant 10^{-k}(p+1),\quad 10^{-k}q \leqslant y \leqslant 10^{-k}(q+1),\\ 10^{-k}r \leqslant z \leqslant 10^{-k}(r+1)\}.$$

При фиксированном k получится разбиение пространства R^3 на кубы с ребрами длины 10^{-k}. Кубы этого разбиения называются *кубами ранга* k.

Для любого множества $X \subset R^3$ через $s_k(X)$ обозначается совокупность всех кубов ранга k, содержащихся в множестве X. Очевидно, как и в случае плоскости,

$$s_0(X) \subset s_1(X) \subset \ldots \subset s_k(X) \subset \ldots \subset X, \tag{27.5}$$

и, следовательно, последовательность объемов $\mu s_k(X)$ конечных или бесконечных многогранников $s_k(X)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, является возрастающей:

$$\mu s_0(X) \leqslant \mu s_1(X) \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k(X) \leqslant \ldots \tag{27.6}$$

Объем (мера) μX множества X (или, подробнее, внутренний объем, внутренняя мера) определяется как конечный или бесконечный предел этой последовательности:

$$\mu X \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \to \infty} \mu s_k(X). \tag{27.7}$$

Таким образом, всякое множество трехмерного пространства R^3 имеет конечный или бесконечный объем. Как и в случае плоскости, доказывается, что если

$$X_1 \subset X_2 \subset R^3, \tag{27.8}$$

то

$$\mu X_1 \leqslant \mu X_2. \tag{27.9}$$

§ 28. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

28.1. Вычисление площадей криволинейных трапеций.

Теорема 1. *Если функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a,b]$, а*

$$P = \{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{28.1}$$

то площадь S множества P выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{28.2}$$

Множество вида (28.1) называется *криволинейной трапецией*, порожденной графиком функции f (рис. 108).

Рис. 108

$\triangleright$ Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$,

$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$
$$m_k = \inf_{x\in\Delta_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x\in\Delta_k} f(x),$$
$$k = 1, 2, ..., k_\tau. \tag{28.3}$$

Обозначим соответственно через p_τ и P_τ замкнутые прямоугольники, составленные из всех прямоугольников вида

$$p_{\tau,k} = \{(x,y):\ x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad 0 \leqslant y \leqslant m_k\}, \tag{28.4}$$
$$P_{\tau,k} = \{(x,y):\ x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad 0 \leqslant y \leqslant M_k\}, \tag{28.5}$$

т. е.

$$p_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} p_{\tau,k}, \quad P_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} P_{\tau,k}. \tag{28.6}$$

Из (28.3) следует, что для любого разбиения τ выполняется включение $p_\tau \subset P \subset P_\tau$, а следовательно (см. теорему в п. 27.1),

$$\mu p_\tau \leqslant \mu P \leqslant \mu P_\tau. \tag{28.7}$$

Из (28.4) и (28.5) следует, что $\mu p_{\tau,k} = m_k \Delta x_k$, $\mu P_{\tau,k} = M_k \Delta x_k$, и так как прямоугольники $P_{\tau,k}$, соответственно $p_{\tau,k}$, не имеют общих внутренних точек, то в силу (28.6)

$$\mu p_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu p_{\tau,k} = \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k = s_\tau, \tag{28.8}$$

$$\mu P_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu P_{\tau,k} = \sum_{k=1}^{k_\tau} M_k \Delta x_k = S_\tau. \tag{28.9}$$

Иначе говоря, площади многоугольников p_τ и P_τ равны соответствен-

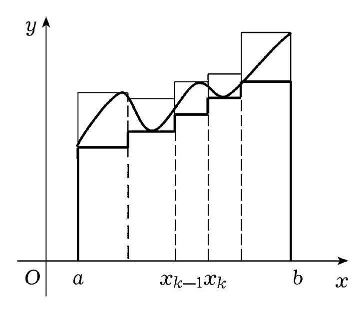


Рис. 109

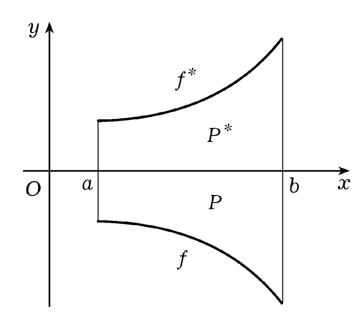


Рис. 110

но нижней и верхней суммам Дарбу функции f (рис. 109). Поэтому из неравенства (28.7) следует, что

$$s_\tau \leqslant \mu P \leqslant S_\tau. \tag{28.10}$$

А так как $\lim\limits_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim\limits_{|\tau|\to 0} S_\tau = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то $\mu P = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. $\triangleleft$

Если функция f неположительна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$P = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b, \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\},$$

то

$$\mu P = -\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{28.11}$$

$\triangleright$ Действительно, если

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} -f(x), \quad x \in [a, b], \tag{28.12}$$

а P^* — множество, симметричное с множеством P относительно оси x (рис. 110), то в силу формулы (28.2)

$$\mu P^* = \int\limits_a^b f^*(x)\,dx, \tag{28.13}$$

ибо функция f^* уже неотрицательна. Поскольку площади симметричных множеств равны, т. е. $\mu P^* = \mu P$, а

$$\int\limits_a^b f^*(x)\,dx \underset{(28.12)}{=} -\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то из равенства (28.13) сразу следует формула (28.11). ◁

Если функция f непрерывна и знакопеременна на отрезке $[a, b]$, то интеграл от нее равен “алгебраической сумме”, вообще говоря, бесконечного числа слагаемых, равных площадям криволинейных трапеций, образованных частями графика функции f, расположенными соответственно в полуплоскостях $y \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$, причем площади первых берутся со знаком плюс, а площади вторых — со знаком минус.

Примеры. 1. Найдем площадь, образованную одной аркой синусоиды:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2.$$

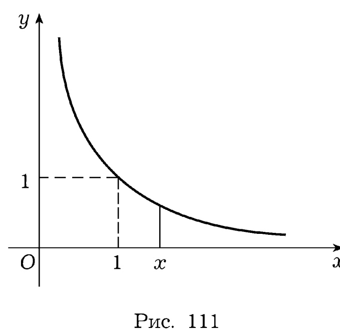


Рис. 111

2. Найдем площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной дугой гиперболы $y = 1/x$, отрезком $[1, x]$ оси x и соответствующими отрезками, параллельными оси y (рис. 111):

$$S(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^x = \ln x.$$

28.2. Вычисление площадей в полярных координатах. Пусть P — замкнутое множество, граница которого состоит из некоторой кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ ($\rho(\varphi)$ — непрерывная функция), и двух отрезков (которые могут превращаться в точки) лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 112), т. е.

$$P = \{(\rho, \varphi)\colon\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)\}.$$

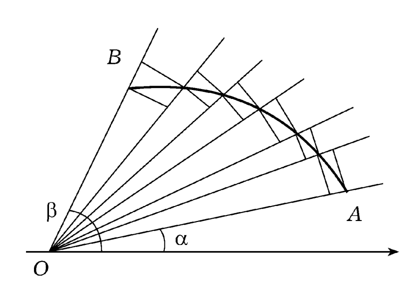


Рис. 112

Найдем формулу для вычисления площади $S = \mu P$ множества P. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ и положим

$$\Delta_k = [\varphi_{k-1}, \varphi_k],$$

$$m_k = \inf_{\varphi\in\Delta_k} \rho(\varphi), \quad M_k = \sup_{\varphi\in\Delta_k} \rho(\varphi), \quad \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1},$$

$$p_{\tau,k} = \{(\rho, \varphi)\colon\ \varphi_{k-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k,\quad 0 \leqslant \rho \leqslant m_k\},$$

$$P_{\tau,k} = \{(\rho, \varphi)\colon\ \varphi_{k-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k,\quad 0 \leqslant \rho \leqslant M_k\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, k_\tau,$$

$$p_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} p_{\tau,k}, \qquad P_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} P_{\tau,k}.$$

Множества $p_{\tau,k}$ и $P_{\tau,k}$ представляют собой круговые секторы с углом $\Delta\varphi_k$ и радиусами соответственно m_k и M_k, а p_τ и P_τ — ступенчатые фигуры, составленные из указанных секторов и соответственно содержащиеся в множестве P и содержащие его: $p_\tau \subset P \subset P_\tau$. Из этих включений следует, что

$$\mu p_\tau \leqslant \mu P \leqslant \mu P_\tau. \tag{28.14}$$

Согласно формуле для площади сектора

$$\mu p_{k,\tau} = \frac{1}{2}\, m_k^2 \Delta\varphi_k, \quad \mu P_{k,\tau} = \frac{1}{2}\, M_k^2 \Delta\varphi_k,$$

поэтому

$$\mu p_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu p_{k,\tau} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k^2 \Delta\varphi_k, \qquad \mu P_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu P_{k,\tau} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_\tau} M_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Получившиеся суммы являются соответственно нижней s_τ и верхней S_τ суммами Дарбу функции $\frac{1}{2}\, \rho^2(\varphi)$: $s_\tau = \mu p_\tau$, $S_\tau = \mu P_\tau$. Таким образом, в силу (28.14)

$$s_\tau \leqslant S = \mu P \leqslant S_\tau. \tag{28.15}$$

Поскольку суммы Дарбу s_τ и S_τ при $|\tau| \to 0$ стремятся к одному и тому же пределу — интегралу от функции $\frac{1}{2}\, \rho^2(\varphi)$:

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi,$$

то из неравенств (28.15) следует, что

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{28.16}$$

Пример. Найдем площадь S множества, ограниченного кривой

$$\rho = a(1 + \cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

(она называется *кардиоидой*; рис. 113):

$$S = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi +$$

$$+ a^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\, \pi a^2.$$

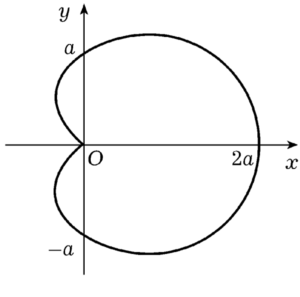


Рис. 113

28.3. Вычисление длины кривой. Применение определенного интеграла к задачам вычисления площадей множеств было основано на его равенстве пределу интегральных сумм. Приведем теперь пример применения определенного интеграла, который основан на формуле Ньютона–Лейбница, позволяющий найти значение функции, если известна ее производная.

Пусть Γ — кривая, заданная своим непрерывно дифференцируемым векторным представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$; тогда она спрямляема, и если $s = s(t)$ — ее переменная длина дуги, отсчитываемая от начала, то функция $s(t)$ дифференцируема и $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$.

По формуле Ньютона–Лейбница для длины $S = s(b)$ кривой имеем формулу

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)\,dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt \quad (s(a) = 0). \tag{28.17}$$

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то

$$S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt. \tag{28.18}$$

В случае, когда кривая Γ является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, для ее длины S в силу (28.18) справедлива формула

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{28.19}$$

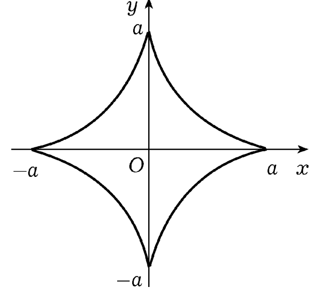


Рис. 114

Пример. Вычислим длину астроиды

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

(рис. 114). В силу симметричности астроиды относительно координатных осей ее длина S равна учетверенной длине ее части, лежащей в первом координатном угле, т. е. соответствующей изменению параметра на отрезке $[0, \pi/2]$.

Заметив, что

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y' = 3a\sin^2 t \cos t,$$

согласно формуле (28.18), в которой надо положить $z' = 0$, получим

$$S = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}\,dt = 6a\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = 6a.$$

28.4. Площадь поверхности вращения. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$:

$$f(x) \geqslant 0, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Множество, получающееся вращением графика функции $f(x)$ вокруг оси Ox, называется *поверхностью вращения* (этого графика). Определим ее площадь. Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — какое-либо разбиение отрезка $[a, b]$. Впишем в график функции f ломаную λ_τ, соответствующую разбиению τ, т. е. ломаную с вершинами в точках (x_k, y_k), где

$$y_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, ..., k_\tau \qquad (28.20)$$

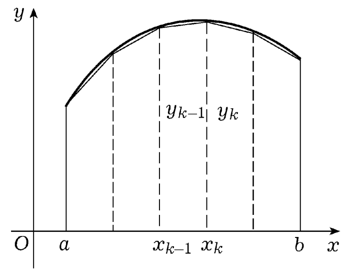


Рис. 115

(рис. 115). Звено этой ломаной с концами в точках (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k) (будем называть его *k-м звеном ломаной* λ_τ) при вращении его вокруг оси x описывает боковую поверхность усеченного конуса (в частности, при $y_{k-1} = y_k$ — боковую поверхность цилиндра), площадь которой равна

$$\pi(y_{k-1} + y_k)\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \qquad (28.21)$$

где y_{k-1} и y_k — соответственно радиусы оснований усеченного конуса, а $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$ — длина его образующей, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$. Поэтому площадь L_τ поверхности, получающейся от вращения ломаной λ_τ вокруг оси Ox, выражается формулой

$$L_\tau = \pi \sum_{k=1}^{k_\tau} (y_{k-1} + y_k)\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}. \qquad (28.22)$$

Если существует предел $\lim\limits_{|\tau| \to 0} L_\tau$, то он называется *площадью поверхности вращения*, образованной вращением графика функции вокруг оси x. Таким образом, обозначив через L площадь указанной поверхности вращения, будем иметь

$$L \overset{\text{def}}{=} \lim_{|\tau| \to 0} L_\tau. \qquad (28.23)$$

Пусть теперь функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$; тогда для площади поверхности L можно получить удобную для вычислений формулу в виде некоторого интеграла.

Теорема 2. *Если функция f непрерывно дифференцируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то для площади поверхности вращения, образованной вращением графика функции f вокруг оси Ox, имеет место формула*

$$L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

▷ Функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, т. е. ее производная непрерывна, и, следовательно, ограничена на этом от-

резке. Это означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f'(x)| \leqslant c. \tag{28.24}$$

По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = f'(\xi_k)\Delta x_k, \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k, \quad k = 1, 2, ..., k_\tau.$$

Поэтому $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$, откуда

$$L_\tau \underset{(28.22)}{=} \pi \sum_{k=1}^{k_\tau} (y_{k-1} + y_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k. \tag{28.25}$$

Эта сумма не является интегральной, так как в ней значения $y_{k-1} = f(x_{k-1})$, $y_k = f(x_k)$ и $f'(\xi_k)$ берутся в разных точках x_{k-1}, x_k и ξ_k отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения τ. Сравним ее с интегральной суммой

$$\sigma_\tau = 2\pi \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \tag{28.26}$$

функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$.

Снова применив формулу Лагранжа, получим

$$\begin{gathered} f(\xi_k) - y_{k-1} = f(\xi_k) - f(x_{k-1}) = f'(\eta_k)(\xi_k - x_{k-1}), \\ x_{k-1} < \eta_k < \xi_k, \\ y_k - f(\xi_k) = f(x_k) - f(\xi_k) = f'(\zeta_k)(x_k - \xi_k), \\ \xi_k < \zeta_k < x_k, \quad k = 1, 2, ..., k_\tau. \end{gathered} \tag{28.27}$$

Теперь имеем

$$\begin{gathered} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \underset{(28.24)}{\leqslant} \sqrt{1 + c^2}, \\ |f(\xi_k) - y_{k-1}| \underset{\substack{(28.24)\\(28.27)}}{\leqslant} c(\xi_k - x_{k-1}) \leqslant c\,\Delta x_k \leqslant c\,|\tau|, \\ |y_k - f(\xi_k)| \underset{\substack{(28.24)\\(28.27)}}{\leqslant} c(x_k - \xi_k) \leqslant c\,\Delta x_k \leqslant c\,|\tau|, \quad k = 1, 2, ..., k_\tau. \end{gathered} \tag{28.28}$$

Поэтому

$$\begin{gathered} |\sigma_\tau - L_\tau| \underset{\substack{(28.25)\\(28.26)}}{=} \\ \underset{\substack{(28.25)\\(28.26)}}{=} \left|\pi \sum_{k=1}^{k_\tau} [(f(\xi_k) - y_{k-1}) - (y_{k-1} - f(\xi_k))]\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\right| \leqslant \\ \leqslant \pi \sum_{k=1}^{k_\tau} (|f(\xi_k) - y_{k-1}| + |y_k - f(\xi_k)|)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \underset{(28.28)}{\leqslant} \\ \underset{(28.28)}{\leqslant} 2\pi c\,|\tau|\sqrt{1 + c^2} \sum_{k=1}^{k_\tau} \Delta x_k = 2\pi c\,(b - a)|\tau|\sqrt{1 + c^2}. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0}(\sigma_\tau - L_\tau) = 0. \tag{28.29}$$

Но σ_τ является интегральной суммой функции $2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, где $y = f(x)$, поэтому

$$\lim_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{28.30}$$

И так как в силу формулы (28.29) $\lim\limits_{|\tau|\to 0} L_\tau = \lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau$, то для площади L поверхности вращения получается формула

$$L \underset{(28.23)}{=} \lim_{|\tau|\to 0} L_\tau \underset{\substack{(28.29)\\(28.30)}}{=} 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \quad \triangleleft \tag{28.31}$$

Вспоминая, что $\sqrt{1+y'^2}\,dx = ds$ (см. п. 17.3), т. е. является дифференциалом длины дуги, формулу (28.31) для площади L поверхности вращения можно записать в более компактном виде

$$L = 2\pi\int_a^b y\,ds. \tag{28.32}$$

Можно показать, что эта формула остается справедливой для площади поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси x любой непрерывно дифференцируемой кривой, заданной параметрическим представлением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и не пересекающей ось x. В этом случае в развернутом виде формула (28.32) имеет вид

$$L = 2\pi\int_a^b y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \tag{28.33}$$

П р и м е р. Найдем площадь L поверхности, полученной вращением вокруг оси x одной арки синусоиды $y = \sin x$. Согласно формуле (28.31) имеем

$$L = 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, был вычислен раньше (пример 2 в п. 26.2), он равен $\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}$. Поэтому сразу находим значение искомой площади

$$L = 2\pi(\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}).$$

28.5. Объем тел вращения. Пусть функция f неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, а Q — множество, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции P, порожденной графиком функции $y = f(x)$ (см. (28.1) и рис. 108). Такого типа множества называются *телами вращения*. Покажем, что для объема V этого тела имеет место формула

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx. \tag{28.34}$$

Обозначим через q_τ и Q_τ тела, образованные вращением вокруг оси x ступенчатых фигур p_τ и P_τ (см. (28.6)), соответствующих некоторому разбиению τ отрезка $[a,b]$. Из включения $p_\tau \subset p \subset P_\tau$ следует включение $q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$, а следовательно, и неравенство

$$\mu q_\tau \leqslant V = \mu Q \leqslant \mu Q_\tau. \tag{28.35}$$

Объемы μq_τ и μQ_τ равны суммам объемов составляющих их цилиндров, образованных вращением прямоугольников $p_{\tau,k}$ и $P_{\tau,k}$ (см. (28.4) и (28.5)):

$$\mu q_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \pi m_k^2 \Delta x_k, \qquad \mu Q_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \pi M_k^2 \Delta x_k$$

(рис. 116). Из этих равенств видно, что μq_τ и μQ_τ являются соответственно нижними и верхними суммами Дарбу функции $\pi f^2(x)$, поэтому

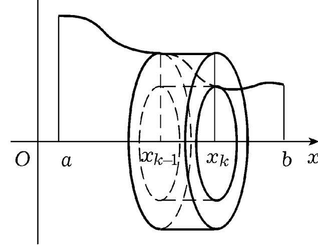


Рис. 116

$$\lim_{|\tau|\to 0} \mu q_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} \mu Q_\tau = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

откуда в силу (28.35) и следует, что

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{28.36}$$

Пример. Найдем объем тела, получающегося от вращения вокруг оси x одной арки синусоиды $y = \sin x$:

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

28.6*. Теоремы Гульдина. Центры тяжести плоских фигур и их моменты относительно осей. Пусть Г — график неотрицательной непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции f, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение этого отрезка, а λ_τ — ломаная, соответствующая этому разбиению и вписанная в кривую Г. Будем кривую Г и ломаные λ_τ рассматривать как материальные кривые, т. е. как имеющие массу. Будем предполагать, что их линейные плот-

ности равны единице. Это означает, что массы их частей совпадают с длинами этих частей.

Как и выше (см. п. 28.4), положим

$$y_k = f(x_k), \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1},$$
$$\Delta(\lambda_\tau)_k \equiv \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k,$$
$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, ..., k_\tau.$$

Рассмотрим физический смысл суммы

$$\sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta(\lambda_\tau)_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k, \tag{28.37}$$

являющейся, очевидно, интегральной суммой функции $y\sqrt{1 + y'^2}$, $y = f(x)$, и потому имеющей своим пределом при $|\tau| \to 0$ интеграл

$$\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_a^b y\, ds. \tag{28.38}$$

Каждое слагаемое $f(\xi_k)\Delta(\lambda_\tau)_k$ суммы (28.37) является произведением массы $\Delta(\lambda_\tau)_k$ k-го звена ломаной λ_τ на некоторое среднее расстояние $f(\xi_k)$ этого звена от оси x, т. е. $f(\xi_k)\Delta(\lambda_\tau)_k$ является приближенным значением момента k-го звена ломаной λ_τ относительно оси x, а вся сумма (28.37) представляет собой приближенное значение момента этой ломаной относительно той же оси. Предел этих приближенных значений моментов ломаных λ_τ при $|\tau| \to 0$ равен моменту M_x кривой Γ относительно оси x. Поскольку сумма (28.37) при $|\tau| \to 0$ стремится к интегралу (28.38), то

$$M_x = \int_a^b y\, ds. \tag{28.39}$$

Этот момент равен моменту относительно оси x материальной точки, масса которой равна массе кривой Γ (в данном случае совпадающей с ее длиной S), помещенной в центр тяжести (x_0, y_0) этой кривой. Момент относительно оси x материальной точки массы S, находящейся в точке (x_0, y_0), равен Sy_0. В силу сказанного он совпадает с моментом M_x, т. е.

$$Sy_0 = M_x. \tag{28.40}$$

Используя формулу (28.39), это равенство можно записать в виде $Sy_0 = \int_a^b y\, ds$. Умножив обе его части на 2π и вспомнив, что $2\pi\int_a^b y\, ds$ является площадью L поверхности вращения (см. п. 28.4), получим, что

$$L = S \cdot 2\pi y_0. \tag{28.41}$$

Мы доказали эту формулу в предположении, что кривая Г является графиком функции f (имеет явное представление). Можно показать, что формула (28.40), а следовательно, и формула (28.41), остается справедливой и для любой непрерывно дифференцируемой кривой, замкнутой или незамкнутой, не пересекающей ось x. Таким образом, верна следующая

Теорема 1 (первая теорема Гульдина*)). *Площадь поверхности, полученной вращением кривой вокруг оси, равна длине кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести кривой.*

В этой теореме предполагается, что кривая, которая вращается около оси, непрерывно дифференцируема, лежит в одной плоскости с указанной осью и по одну сторону от нее.

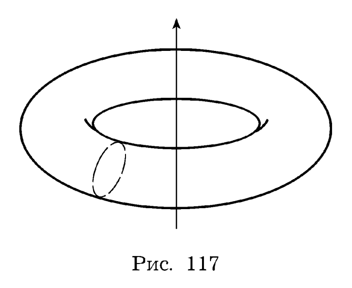


Рис. 117

Эта теорема позволяет иногда находить площади поверхностей вращения без вычисления интегралов. Например, найдем площадь поверхности тора, т. е. поверхности, образованной вращением вокруг оси окружности радиуса r, центр которой находится на расстоянии a от оси. При этом будем считать, что ось и окружность лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. $a > r$ (рис. 117).

Поскольку длина вращаемой окружности равна $2\pi r$, а ее центр является и ее центром тяжести, то согласно формуле (28.41)

$$L = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar.$$

Отметим, что аналогично формуле (28.40) для другой координаты x_0 центра тяжести кривой Г имеет место формула

$$Sx_0 = M_y. \tag{28.42}$$

Из соотношений (28.40) и (28.42) следуют формулы для координат x_0, y_0 центра тяжести кривой Г, именно,

$$x_0 = M_y/S, \quad y_0 = M_x/S, \tag{28.43}$$

где момент M_y кривой Г относительно оси y может быть вычислен по формуле, аналогичной формуле (28.39) для момента M_x:

$$M_y = \int_a^b x\,ds.$$

Если кривая Г не удовлетворяет условиям, при которых получена формула (28.39), то можно попытаться разбить кривую Г на конечное число кривых, каждая из которых уже удовлетворяет указанным

*) П. Гульдин (1577–1633) — швейцарский математик.

условиям, и воспользоваться тем, что момент относительно оси объединения тел равен сумме их моментов.

Перейдем ко второй теореме Гульдина.

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $x \in [a,b]$,

$$P \overset{\text{def}}{=} \{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b, \quad g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}; \tag{28.44}$$

как всегда, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k],$$

а P_τ — на этот раз ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников

$$P_{\tau,k} = \{(x,y)\colon\ x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k,\\ g(\xi_k) \leqslant y \leqslant f(\xi_k)\}$$

с основаниями и высотами, равными соответственно Δx_k и $f(\xi_k) - g(\xi_k)$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$ (рис.118):

$$P_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} P_{\tau,k}.$$

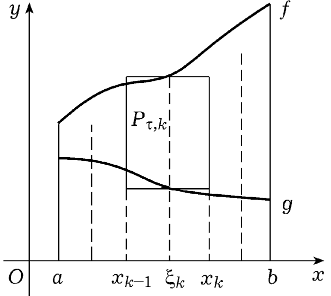


Рис. 118

Будем рассматривать фигуры P и P_τ как материальные, т. е. как фигуры, имеющие массу с плотностью 1. Это означает, что масса каждой из их частей совпадает с площадью этой части.

Центр тяжести прямоугольника $P_{\tau,k}$ находится в его центре и, следовательно, на расстоянии

$$\frac{1}{2}\,[f(\xi_k) + g(\xi_k)] \tag{28.45}$$

от оси x.

Момент прямоугольника $P_{\tau,k}$ относительно оси x равен произведению ординаты его центра тяжести (28.45) на его массу, т. е. в данном случае на площадь $[f(\xi_k) - g(\xi_k)]\Delta x_k$. Таким образом, этот момент равен

$$\frac{1}{2}\,[f^2(\xi_k) - g^2(\xi_k)]\Delta x_k.$$

Для момента же M_τ ступенчатой фигуры P_τ, равного сумме моментов составляющих его прямоугольников $P_{\tau,k}$, имеем формулу

$$M_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k_\tau}[f^2(\xi_k) - g^2(\xi_k)]\Delta x_k. \tag{28.46}$$

Момент M_x самой фигуры P относительно оси x равен пределу моментов M_τ ступенчатых фигур при $|\tau| \to 0$:

$$M_x = \lim_{|\tau|\to 0} M_\tau. \tag{28.47}$$

Сумма, стоящая в правой части равенства (28.46), представляет собой интегральную сумму функции $\frac{1}{2}[f^2(x) - g^2(x)]$, поэтому имеем также

$$\lim_{|\tau|\to 0} M_\tau = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx. \tag{28.48}$$

Таким образом, из (28.47) и (28.48) следует, что момент M_x фигуры P относительно оси x равен интегралу, стоящему в правой части формулы (28.48):

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx. \tag{28.49}$$

Момент фигуры относительно оси равен моменту материальной точки, масса которой равна массе фигуры и которая помещена в центр тяжести фигуры.

Поэтому если (x_0, y_0) — центр тяжести фигуры P, то, так как ее масса в данном случае совпадает с ее площадью S, получим

$$M_x = Sy_0, \tag{28.50}$$

или, в силу (28.49),

$$Sy_0 = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx.$$

Умножим обе части последнего равенства на 2π:

$$S\cdot 2\pi y_0 = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \pi\int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

В правой части этого равенства стоит разность объемов тел, полученных вращением вокруг оси x криволинейных трапеций, порожденных графиками соответственно функций f и g (п. 28.5), т. е. объем V тела, получающегося вращением фигуры P вокруг оси x:

$$V = S\cdot 2\pi y_0. \tag{28.51}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2 (вторая теорема Гульдина). *Объем тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести фигуры.*

Здесь под плоской фигурой понимается множество P рассмотренного выше типа (см. (28.44)), а под ее вращением — вращение этой фигуры вокруг оси, лежащей с фигурой в одной плоскости и не пересекающей ее.

Пример. Найдем объем V тора, рассмотренного в качестве примера применения первой теоремы Гульдина. Поскольку площадь вращаемой фигуры (в данном случае круга) равна πr^2, то в силу формулы (28.51)

$$V = \pi r^2\cdot 2\pi a = 2\pi^2 r^2 a.$$

Отметим в заключение, что для координаты x_0 центра тяжести фигуры P имеет место формула (аналогичная формуле (28.50))

$$M_y = Sx_0, \tag{28.52}$$

где момент M_y фигуры P находится по формуле, аналогичной формуле (28.49).

Из формул (28.50) и (28.52) получаются следующие формулы для координат центра тяжести (x_0, y_0) фигуры P:

$$x_0 = M_y/S, \quad y_0 = M_x/S.$$

§ 29. Несобственные интегралы

29.1. Определение несобственных интегралов. Пусть функция f определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого числа $\eta \in [a, b)$ интегрируема на отрезке $[a, \eta]$.

Определение 1. Функция $F(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ верхнего предела интегрирования, $a \leqslant \eta < b$, называется *несобственным интегралом* и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to b}\int\limits_b^\eta f(x)\,dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, а если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

В случае когда несобственный интеграл сходится, говорят также, что он *существует*, а если расходится, то *не существует*.

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то предел $\lim\limits_{\eta\to b}\int\limits_b^\eta f(x)\,dx$ обозначается тем же символом, что и сам интеграл, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to b}\int\limits_a^\eta f(x)\,dx, \tag{29.1}$$

и для краткости также называется несобственным интегралом (иногда — его *значением*).

Подчеркнем, что здесь возможны два случая: когда b — конечное

число и когда b равно бесконечности (рис. 119).

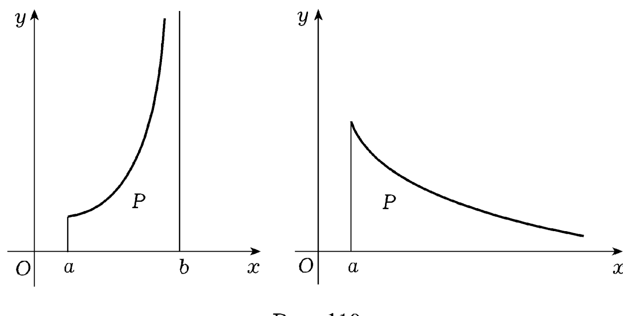


Рис. 119

Если b конечно, а функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то в силу непрерывности интеграла (свойство 9 в п. 24.1) предел $\lim\limits_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$, $a \leqslant \eta < b$, существует и равен интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом, интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла.

При условии конечности b определение 1 содержательно, только если функция f неограничена в любой окрестности точки b (см. рис. 119): если функция f ограничена на полуинтервале $[a, b)$ и для любого $\eta \in [a, b]$ она интегрируема по Риману на отрезке $[a, \eta]$, то нетрудно убедиться, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует и совпадает с интегралом Римана функции f, произвольно доопределенной в точке $x = b$.

Для отличия интеграла Римана от несобственного интеграла интеграл Римана называют иногда *собственным интегралом.*

Геометрический смысл несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от неотрицательной функции f состоит в том, что он, подобно собственному интегралу, равен площади криволинейной трапеции

$$P = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x < b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

порожденной графиком функции f, причем эта трапеция (как в случае неограниченной функции f и конечного промежутка $[a, b)$, так и в случае бесконечного промежутка $[a, b)$) всегда является (в отличие от того, что имело место для собственного интеграла) неограниченным множеством.

Если $a < c < b$, то из равенства

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\eta f(x)\,dx \qquad (29.2)$$

сразу видно, что несобственный интеграл (29.1) существует в том и только том случае, когда существует несобственный интеграл $\int_c^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta\to b}\int_c^\eta f(x)\,dx$, причем в случае существования этих интегралов, перейдя в равенстве (29.1) к пределу при $\eta \to b$, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (29.3)$$

В этом равенстве $\int_a^b$ и $\int_c^b$ — несобственные интегралы, а $\int_a^c$ — собственный интеграл.

Если функция f определена на полуинтервале $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, и при любом $\xi \in (a, b]$ интегрируема по Риману на отрезке $[\xi, b]$, то аналогично формуле (29.1) несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определяется как функция $F(\xi) = \int_\xi^b f(x)\,dx$ нижнего предела интегрирования, $a < \xi \leqslant b$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\xi\to a}\int_\xi^b f(x)\,dx$, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

Здесь, как и выше, в случае, когда несобственный интеграл сходится, говорят, что он *существует*, а когда расходится, что он *не существует*.

Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то предел $\lim\limits_{\xi\to a}\int_\xi^b f(x)\,dx$ обозначается тем же символом, что и сам интеграл, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\xi\to a}\int_\xi^b f(x)\,dx, \qquad (29.4)$$

и для краткости также называется несобственным интегралом (иногда — его *значением*).

Для интеграла (29.4) имеет место свойство, аналогичное свойству (29.3) для интеграла (29.1).

Если функция f определена на интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и $c \in (a, b)$, то *несобственным интегралом* $\int_a^b f(x)\,dx$ называется пара

несобственных интегралов $\int\limits_a^c f(x)\,dx$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx$. Если оба эти интеграла сходятся, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, а если хотя бы один расходится, то — расходящимся. Если интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходятся, то их сумма обозначается тем же символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{29.5}$$

Из свойства (29.3) и аналогичного свойства для интеграла (29.4) следует, что существование и значение несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависят в рассматриваемом случае от выбора точки $c \in (a, b)$.

Определим теперь общее понятие несобственного интеграла от функции f по промежутку Δ с концами a и b, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.

Всякое множество точек $X = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ расширенной числовой прямой называется *правильным разбиением промежутка* Δ *относительно функции* f, если:

1) $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$;

2) функция f интегрируема по Риману на любом конечном отрезке, лежащем на промежутке Δ и не содержащем точек множества X.

Ясно, что на каждом из промежутков (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n) имеет смысл несобственный интеграл от функции f одного из трех рассмотренных выше типов,

Совокупность интегралов

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{29.6}$$

называется в этом случае *несобственным интегралом* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если все интегралы (29.6) сходятся, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, а если хотя бы один из них расходится, то — *расходящимся*.

В случае когда интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ обо-

значается и сумма интегралов (29.6), т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx,$$

и эта сумма также называется *несобственным интегралом* (иногда — его *значением*).

Сходимость и расходимость несобственного интеграла, как и его значение, если он сходится, не зависят от выбора правильного разбиения промежутка Δ относительно заданной функции f.

Заметим, что если к правильному разбиению X промежутка Δ добавить любое конечное множество точек расширенной числовой прямой, принадлежащих этому промежутку, то полученное множество также будет, очевидно, правильным разбиением Δ относительно функции f.

Перейдем к рассмотрению примеров. Вычислим несобственные интегралы от функции $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, на полуинтервале $(0, 1]$ (где она неограниченна) и на бесконечном промежутке $[1, +\infty)$.

Примеры. 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} \underset{(29.4)}{=} \lim_{\xi\to 0}\int_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to 0} \ln x\Big|_\xi^1 = +\infty.$

2. $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \underset{(29.4)}{=} \lim_{\xi\to 0}\int_\xi^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\xi\to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\xi^1 =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1,\\ +\infty & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что при $0 < \alpha < 1$ несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ существует, в то время как собственный интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ заведомо не существует, поскольку функция $x^{-\alpha}$ при любом ее доопределении в точке $x = 0$ будет неограниченной на отрезке $[0, 1]$. Этот пример говорит о том, что в случае конечного промежутка понятие несобственного интеграла шире понятия собственного интеграла. В случае же бесконечного промежутка понятия собственного интеграла просто нет.

Итак, интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$ (при $\alpha < 0$ этот интеграл является интегралом Римана).

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \underset{(29.1)}{=} \lim_{\eta\to+\infty}\int_1^\eta \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+\infty} \ln x\Big|_1^\eta = +\infty.$

4. $\alpha \neq 1$, $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \underset{(29.1)}{=} \lim_{\eta\to+\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{\eta} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Итак, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

29.2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов. В силу свойства предела функций и определения значения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, на собственные интегралы предельным переходом переносятся многие свойства определенного интеграла.

В дальнейшем в этом параграфе для простоты в вопросах теории будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a, b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $-\infty < a \leqslant \eta < b \leqslant +\infty$ (определение (29.1)), если, конечно, специально не оговорено что-либо другое.

Аналогичные определения и теоремы для интегралов (29.4) и (29.5) читатель без труда сформулирует самостоятельно.

Для общего несобственного интеграла (29.6) утверждения, аналогичные тем, которые будут сформулированы ниже для интеграла вида (29.1), также справедливы и в случае необходимости могут быть сформулированы читателем.

1°. Формула Ньютона–Лейбница. *Если функция f непрерывна на промежутке $[a, b)$ и Φ — какая-либо ее первообразная, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b-0) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

В этом равенстве либо обе части одновременно имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, т. е. стоящие в них пределы не существуют.

▷ Справедливость формулы (29.7) следует из того, что для любого $\eta \in [a, b)$, согласно формуле Ньютона–Лейбница для интеграла Римана (теорема 3 из п. 25.2), имеет место равенство

$$\int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx = \Phi(\eta) - \Phi(a). \tag{29.8}$$

Из него следует, что предел $\lim\limits_{\eta\to b} \int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{\eta\to b} \Phi(\eta)$, причем, если эти пределы

существуют, то, перейдя в равенстве (29.8) к пределу при $\eta \to b$, получим формулу (29.7). $\lhd$

2°. Линейность интеграла. *Если несобственные интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся, то для любых чисел* λ *и* μ *несобственный интеграл* $\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx$ *также сходится и*

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx. \qquad (29.9)$$

$\rhd$ Действительно, на основании соответствующих свойств предела и линейности интеграла Римана имеем

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx \underset{(29.1)}{=} \lim_{\eta\to b} \int\limits_a^\eta [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\eta\to b} \Big[\lambda \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^\eta g(x)\,dx\Big] = \lambda \lim_{\eta\to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \lim_{\eta\to b} \int\limits_a^\eta g(x)\,dx \underset{(29.1)}{=}$$

$$\underset{(29.1)}{=} \lambda \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^\eta g(x)\,dx. \lhd$$

3°. Интегрирование неравенств. *Если интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся и для всех* $x \in [a, b)$ *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx. \qquad (29.10)$$

$\rhd$ В силу соответствующего свойства интеграла Римана (см. следствие свойства 6° в п. 24.1) для любого $\eta \in [a, b)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\eta g(x)\,dx.$$

Перейдя в нем к пределу при $\eta \to b$, получим неравенство (29.10). $\lhd$

Аналогичным образом, исходя из соответствующих свойств интеграла Римана, с помощью предельного перехода доказываются и следующие два свойства несобственных интегралов (проведение доказательств которых предоставляется читателю).

4°. Правило замены переменной. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на полуинтервале* $\Delta_x = [a, b)$, *функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на полуинтервале* $\Delta_t = [\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, *и*

выполняются условия

$$\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \lim_{t\to\beta} \varphi(t),$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \tag{29.11}$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в этом равенстве, следует существование интеграла, стоящего справа.

Если функция φ такова, что обратная функция φ^{-1} однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на функцию φ, и, следовательно, в интеграле, стоящем в правой части равенства (29.11), можно сделать замену переменной $t = \varphi^{-1}(x)$, то оба интеграла в этом равенстве сходятся или расходятся одновременно.

С помощью замены переменной из условий сходимости интегралов, рассмотренных в примерах 1 и 2 п. 29.1, следует, что интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $-\infty < a < b < +\infty$, сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$. В самом деле, первый интеграл с помощью замены переменной $t = x - a$, а второй с помощью $t = b - x$ приводятся к интегралу $\int\limits_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha}$.

5°. Правило интегрирования по частям. *Если функции u и v непрерывны на промежутке $[a, b)$, а их производные кусочно непрерывны на любом отрезке $[a, \eta)$, $a < \eta < b$, то*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^{b-0} - \int_a^b v\,du. \tag{29.12}$$

При этом из существования любых двух из следующих трех пределов:

$$\int_a^b u\,dv = \lim_{\eta\to b} \int_a^\eta u\,dv, \quad \int_a^b v\,du = \lim_{\eta\to b} \int_a^\eta v\,du,$$

$$uv\Big|_a^{b-0} = \lim_{\eta\to b} u(\eta)v(\eta) - u(a)v(a)$$

следует существование оставшегося.

Замечание. Отметим, что не все свойства интеграла Римана переносятся на несобственные интегралы. Например, интеграл от произведения двух функций может расходится в случае, когда интеграл от каждого из сомножителей сходится: если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то интеграл

$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а интеграл $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится.

Примеры. 1. Посредством замены переменной $x = 1/t$ вычислим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ Проинтегрировав по частям при $n > 0$, будем иметь

$$I_n = -\int\limits_0^{+\infty} x^n\,de^{-x} = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = nI_{n-1}. \quad (29.13)$$

Поскольку $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, то, применив последовательно рекуррентную формулу (29.13), получим

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \ldots = n!\,I_0 = n!.$$

29.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Установим признаки сходимости для несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Лемма 1. *Если функция f неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$, то для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы множество всех интегралов $\int\limits_a^\eta f(x)\,dx$, $\eta \in [a, b)$, было ограничено сверху, т. е. чтобы существовала такая постоянная $c > 0$, что для всех $\eta \in [a, b)$ выполнялось бы неравенство*

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx \leqslant c. \quad (29.14)$$

$\triangleright$ Положим

$$\varphi(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \quad (29.15)$$

Если $a \leqslant \eta < \eta' < b$, то

$$\varphi(\eta') = \int\limits_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \int\limits_\eta^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^\eta f(x)\,dx = \varphi(\eta),$$

ибо в силу неотрицательности функции f имеет место неравенство $\int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant 0$, т. е. функция $\varphi(\eta)$ возрастает на полуинтервале $[a, b)$. Существование несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ означает существование конечного предела

$$\lim_{\eta\to b} \varphi(\eta) = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

что имеет место тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\eta)$ ограничена сверху (см. теорему 4 в п. 6.11), а это в силу (29.15) равносильно условию (29.14). $\triangleleft$

Замечание. При доказательстве леммы 1 было показано, что в случае неотрицательности функции f функция $\varphi(\eta)$ (см. (29.15)) возрастает на $[a, b)$ и, следовательно, всегда имеет при $\eta \to b$ конечный или бесконечный, равный $+\infty$, предел в зависимости от того, ограничена она или нет. Если функция $\varphi(\eta)$ неограничена на $[a, b)$, то

$$\lim_{\eta\to b} \int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx \underset{(29.15)}{=} \lim_{\eta\to b} \varphi(\eta) = +\infty,$$

и в этом случае пишут

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = +\infty$$

(как мы уже и поступали в примерах п. 29.1).

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть*

$$0 \leqslant g(x) \leqslant f(x), \quad x \in [a, b). \tag{29.16}$$

Тогда:

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$;

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Следствие 1. *Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке $[a, b)$, $g(x) \neq 0$ при всех $x \in [a, b)$ и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \tag{29.17}$$

Тогда:

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то и ин-*

теграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится;*

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится.*

Следствие 2. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *эквивалентны при* $x \to b$, *т. е.* $f(x) = \varphi(x)g(x)$, $a \leqslant x < b$, $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = 1$, *то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *одновременно сходятся или расходятся.*

▷ Докажем теорему. Для любого $\eta \in [a, b)$ в силу неравенства (29.16) имеем

$$\int\limits_a^\eta g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\eta f(x)\,dx.$$

Поэтому если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится и, следовательно, согласно лемме 1 ограничен сверху интеграл $\int\limits_a^\eta f(x)\,dx$, то будет ограничен сверху и интеграл $\int\limits_a^\eta g(x)\,dx$, откуда, согласно той же лемме, интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится.

Если же расходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то в силу уже доказанного интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не может сходиться, так как тогда бы сходился и интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, а это противоречит условию. Таким образом, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. ◁

Докажем теперь следствие 1.

▷ Пусть выполняется условие (29.17) и $0 \leqslant k < +\infty$. Из того, что k является пределом функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства $k < k+1$ следует существование такого $\eta \in [a, b)$, что если $\eta < x < b$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} < k+1$, т. е.

$$f(x) < (k+1)g(x). \tag{29.18}$$

Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то сходится интеграл $\int\limits_\eta^b (k+1)g(x)\,dx$ (см. (29.3) и (29.9)); следовательно, в силу неравенства (29.18) интеграл $\int\limits_\eta^b f(x)\,dx$, а поэтому и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходятся.

Пусть теперь условие (29.17) выполняется при $0 < k \leqslant +\infty$. Тогда зафиксируем произвольно такое k', что $0 < k' < k$. Из того, что k является пределом функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства $k' < k$ следует существование такого $\eta \in [a, b)$, что для всех $x \in (\eta, b)$ выполняется неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} > k'$, т. е. неравенство

$$f(x) > k'g(x).$$

Отсюда в силу расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b k'g(x)\,dx$, а следовательно, по теореме 1 и расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. $\triangleleft$

Докажем теперь следствие 2.

$\triangleright$ Из условия $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = 1$ следует, что существует такое число c, $a < c < b$, что при $c \leqslant x < b$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$. А так как $f(x) = \varphi(x)g(x)$, то

$$\frac{1}{2}\,g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}\,g(x).$$

Отсюда в силу теоремы и следует, что интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

При применении признака сходимости для исследования интеграла обычно начинают со сравнения подынтегральной функции с функциями

$$\frac{1}{(x-a)^\alpha}, \quad \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad \frac{1}{x^\alpha},$$

сходимость интегралов от которых уже известна (примеры п. 29.1 и п. 29.2).

Примеры. 1. Выясним, сходится ли интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}. \tag{29.19}$$

Имеем $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^2}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}(1-x)^{1/4}}$, $x \to 1$, а так как интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$ сходится, то сходится и интеграл (29.19).

2. Исследуем интеграл

$$\int_0^1 \ln x\,dx. \tag{29.20}$$

Для любого $\alpha > 0$, применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\alpha/x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0,$$

в частности, это равенство имеет место при $0<\alpha<1$. Но при $0<\alpha<1$ интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, следовательно, сходится и интеграл (29.20).

3. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}. \tag{29.21}$$

Поскольку $\ln x = \ln[1+(x-1)] \sim x-1$ при $x \to 1$ и интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ расходится, то расходится и интеграл (29.21).

4. Рассмотрим на бесконечном промежутке $(0, +\infty)$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{29.22}$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{x/2}} = 0$$

(в этом легко можно убедиться по правилу Лопиталя) и что интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$, очевидно, сходится:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big|_0^{+\infty} = 2.$$

Отсюда в силу следствия теоремы 1 при $f(x) = x^n e^{-x}$ и $g(x) = e^{-x/2}$ вытекает, что интеграл (29.22) сходится.

29.4. Критерий Коши.

Теорема 2 (критерий Коши сходимости интеграла). *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится тогда и только тогда, когда для*

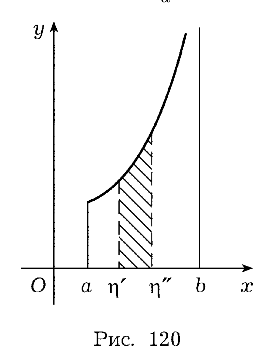


Рис. 120

Рис. 121

любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* η, *что для всех* η' *и* η'', *удовлетворяющих условию*

$$\eta < \eta' < b, \quad \eta < \eta'' < b, \tag{29.23}$$

выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \tag{29.24}$$

(рис. 120 и рис. 121).

$\triangleright$ Если положить

$$\varphi(\eta) = \int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx, \tag{29.25}$$

то сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет означать существование конечного предела функции $\varphi(\eta)$ при $\eta \to b$. Согласно критерию Коши существования предела функции (п. 6.12) для существования указанного предела необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое η, что если $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, то

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \varepsilon. \tag{29.26}$$

Так как

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') \underset{(29.25)}{=} \int\limits_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int\limits_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

то неравенство (29.24) совпадает с неравенством (29.26). $\triangleleft$

29.5. Абсолютно сходящиеся интегралы. Как и выше, будем предполагать, что функция f задана на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$.

Определение 2. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 3 (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла). *Для того чтобы интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* η, $a \leqslant \eta < b$, *что если* $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, *то*

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon. \tag{29.27}$$

$\triangleright$ Применив критерий Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 2) к интегралу $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, получим утверждение теоремы 3. $\triangleleft$

Теорема 4. *Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

$\triangleright$ Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то согласно необходимости выполнения условий критерия Коши абсолютной сходимости интеграла для любого $\varepsilon > 0$ существует такое η, что если

$$\eta < \eta' < b, \quad \eta < \eta'' < b, \tag{29.28}$$

то

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon. \tag{29.29}$$

Но

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right|, \tag{29.30}$$

поэтому,если выполнено условие (29.28), то

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| \underset{\substack{(29.30)\\(29.29)}}{<} \varepsilon. \tag{29.31}$$

В силу достаточности выполнения условий критерия Коши для схо-

димости интеграла из (29.28) и (29.31) следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \quad \triangleleft$$

Если интеграл от абсолютной величины функции сходится, то она называется *абсолютно интегрируемой* (в несобственном смысле) на соответствующем промежутке.

Теорема 4 показывает, что если функция абсолютно интегрируема, то она и просто интегрируема в несобственном смысле. Обратное утверждение неверно. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{29.32}$$

Прежде всего, если доопределить подынтегральную функцию при $x = 0$ единицей, то, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, получившаяся функция будет непрерывной, а следовательно, интегрируемой по Риману на любом отрезке $[0, \eta]$, $\eta > 0$. Поэтому определение (29.1) несобственного интеграла (29.32) имеет смысл. Кроме того, интеграл (29.32) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{29.33}$$

Для выяснения сходимости этого интеграла проинтегрируем его по частям: если в результате получатся выражения, имеющие смысл и принимающие конечные значения, то это будет являться обоснованием возможности интегрирования по частям и будет означать сходимость интеграла (29.33). Имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,d\cos x = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x\, d\Big(\frac{1}{x}\Big) = \\ = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{29.34}$$

Получившийся интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \tag{29.35}$$

абсолютно сходится, ибо $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, а интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится. Следовательно, интегралы (29.35), а потому и (29.33) сходятся.

Покажем теперь, что интеграл (29.33) не сходится абсолютно, т. е.

что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится. Из неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{29.36}$$

следует, что для любого $\eta > 0$ выполняется неравенство

$$\int\limits_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \underset{(29.36)}{\geqslant} \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta}\frac{\cos 2x}{x}\,dx. \tag{29.37}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится, т. е.

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_1^{\eta}\frac{dx}{x} = +\infty, \tag{29.38}$$

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится. Действительно, аналогично случаю интеграла (29.33) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,d(\sin 2x) = \frac{\sin 2x}{2x}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\sin 2x\,d\Big(\frac{1}{x}\Big) =$$

$$= -\frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx, \tag{29.39}$$

и поскольку $\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$ абсолютно, а следовательно, и просто сходится. Поэтому из равенства (29.39) следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2}\,dx$ сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_1^{\eta}\frac{\cos 2x}{x^2}\,dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2}\,dx. \tag{29.40}$$

Из неравенства (29.37) и выполнения условий (29.38) и (29.40) получаем

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_1^{\eta}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty,$$

т. е. действительно интеграл (29.33) не сходится абсолютно.

Замечание. Отметим одно простое свойство абсолютно сходящихся интегралов. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится, а функция $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\eta] \subset [a,b)$

и ограничена на полуинтервале $[a,b)$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ также абсолютно сходится.

В самом деле, произведение интегрируемых по Риману функций также интегрируемо по Риману (свойство 5 в п. 24.1), поэтому функция $f(x)g(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\eta]\subset[a,b)$, и, следовательно, можно говорить о несобственном интеграле $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Из ограниченности функции $g(x)$ следует, что существует такая постоянная $c>0$, что для всех $x\in[a,b)$ выполняется неравенство $|g(x)|\leqslant c$, а поэтому и неравенство $|f(x)g(x)|\leqslant c|f(x)|$, из которого явствует, что сходимость интеграла $\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx$ вытекает, согласно признаку сравнения для сходимости интегралов от неотрицательных функций, из сходимости интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Определение абсолютно сходящегося интеграла естественным образом обобщается на несобственный интеграл общего вида, определяемый с помощью правильных разбиений промежутка интегрирования (см. п. 29.1), и для него остаются верными аналоги теорем, доказанных выше в этом пункте для абсолютно сходящихся интегралов специального вида (определение 1, п. 29.1).

29.6. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Теорема 5 (признак Дирихле). *Если на полуоси $x\geqslant a$:*

1) *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную;*

2) *функция g непрерывно дифференцируема и убывает, стремясь к нулю при $x\to+\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;*

то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \tag{29.41}$$

сходится.

▷ Пусть F — ограниченная первообразная функции f на полуоси $x\geqslant a$, $F'(x)=f(x)$. По условию функция f непрерывна, поэтому функция F непрерывно дифференцируема. Проинтегрируем по частям интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$, $a<b<+\infty$:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=\int\limits_a^b g(x)\,dF(x)=F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{29.42}$$

Поскольку по условию функция F ограничена на полуоси $x\geqslant a$, то

существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \geqslant a$ выполняется неравенство
$$|F(x)| \leqslant c \tag{29.43}$$
и, следовательно, $|F(b)g(b)| \leqslant c|g(b)|$. В силу стремления к нулю функции g при $x \to +\infty$ отсюда получаем
$$\lim_{b\to+\infty} F(b)g(b) = 0. \tag{29.44}$$

Докажем теперь, что интеграл $\int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx$, стоящий в правой части равенства (29.42), абсолютно сходится. Из убывания функции $g(x)$ (второе условие теоремы) вытекает, что $g'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant a$, т. е.
$$|g'(x)| = -g'(x). \tag{29.45}$$
Далее, из того, что функция g при $x \geqslant a$, убывая, стремится к нулю, когда $x \to +\infty$, следует, что $g(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant a$, в частности,
$$g(b) \geqslant 0. \tag{29.46}$$
В результате
$$\int\limits_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \underset{(29.45)}{=} -\int\limits_a^b |F(x)|g'(x)\,dx \underset{(29.43)}{\leqslant} -c\int\limits_a^b g'(x)\,dx =$$
$$= c[g(a) - g(b)] \underset{(29.46)}{\leqslant} cg(a).$$

Таким образом, множество интегралов $\int\limits_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ при всех $b \geqslant a$ ограничено сверху, а это, согласно лемме п. 29.3, и означает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|\,dx$. Итак, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ абсолютно, а следовательно, и просто сходится, т. е. существует конечный предел
$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx. \tag{29.47}$$

В силу выполнения условий (29.44) и (29.47) из равенства (29.42) следует существование конечного предела
$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = -F(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx,$$
что и означает сходимость интеграла (29.41). $\lhd$

Теорема 6 (признак Абеля). *Если на полуоси $x \geqslant a$:*

1) *функция f непрерывна и интеграл*
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{29.48}$$
сходится;

2) *функция* g *непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна*;

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

сходится.

$\triangleright$ Покажем, что эта теорема вытекает из предыдущей. Прежде всего отметим, что интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(x)[-g(x)]\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно и что в силу монотонности функции g одна из функций g или $-g$ убывает. Пусть для определенности убывает функция g. В силу ее ограниченности и монотонности существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = c,$$

а так как функция g убывает, то, убывая, стремится к нулю и разность $g(x) - c$ при $x \to +\infty$.

Представим произведение $f(x)g(x)$ в виде

$$f(x)g(x) = f(x)[g(x) - c] + cf(x). \tag{29.49}$$

В силу первого условия теоремы интеграл $\int_a^{+\infty} cf(x)\,dx$ сходится. Из этого же условия следует, что интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \geqslant a$, ограничен. В самом деле, из существования конечного предела $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ следует ограниченность функции F в некоторой окрестности $U(+\infty) = \{x\colon\ x > b\}$ бесконечно удаленной точки $+\infty$ (свойство 1° из п. 6.7). На отрезке же $[a, b]$ функция F ограничена, ибо она непрерывна. В результате функция F ограничена на всей полупрямой $x \geqslant a$. Функция F является первообразной функции f, тем самым функция f имеет ограниченную первообразную при $x \geqslant a$.

Таким образом, для интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - c]\,dx$ выполнены все условия признака Дирихле, и потому этот интеграл сходится. В силу доказанного из равенства (29.49) следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx. \quad \triangleleft$$

Примеры. 1. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ в силу признака Дирихле сходится при всех $\alpha > 0$. Действительно, функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция $g(x) = 1/x^\alpha$, убывая, стремится к нулю.

2. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha > 0$, в силу признака Абеля сходится. В самом деле, как мы уже знаем, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится, а функция $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ограниченна и монотонна.

Замечание. Усовершенствовав доказательства теорем 5 и 6, можно показать, что признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов остаются справедливыми, если у функции f условие ее непрерывности заменить условием ее интегрируемости на любом конечном отрезке $[a, b]$, а у функции g отбросить требование ее непрерывной дифференцируемости, оставив все остальные.

29.7. Интегралы от комплекснозначных функций действительного аргумента. Если функция $f(x)$ определена на промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и ее значениями являются комплексные числа, т. е.

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad u(x) \in R, \quad v(x) \in R, \tag{29.50}$$

то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (собственный или несобственный) определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx. \tag{29.51}$$

Это определение имеет, конечно, смысл только тогда, когда оба интеграла в правой части равенства существуют.

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным*, если хотя бы один из интегралов $\int\limits_a^b u(x)\,dx$, $\int\limits_a^b v(x)\,dx$ несобственный. При этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся,* если сходятся оба интеграла $\int\limits_a^b u(x)\,dx$, $\int\limits_a^b v(x)\,dx$. В этом случае, согласно определению, имеет место равенство (29.51).

Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой*, если абсолютно интегрируемы функции $u(x)$ и $v(x)$.

Определение (29.51) сохраняет свойство линейности:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

$$\lambda_1 \in C, \quad \lambda_2 \in C.$$

Ряд свойств интеграла от действительных функций (аддитивность по множествам интегрирования, формула Ньютона–Лейбница, правила замены переменной и интегрирования по частям) также переносится и на случай комплекснозначных функций.

Если $f(x) = u(x) + iv(x)$, причем действительные функции $u(x)$ и $v(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, также называемый в этом случае *интегралом Римана*, является пределом (комплекснозначных) интегральных сумм $\sigma_\tau = \sum\limits_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k$, где $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., k_\tau$:

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$|\tau|$ — мелкость разбиения τ.

Отсюда тем же методом, что и для действительных функций, легко показать, что если для функции f существует интеграл Римана, то он существует и для ее абсолютной величины, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Предельным переходом справедливость этого неравенства устанавливается и для абсолютно интегрируемых в несобственном смысле комплекснозначных функций.

Подобным же образом вводится и понятие неопределенного интеграла от функции (29.50):

$$\int f(x)\,dx = \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx. \tag{29.52}$$

Для этого интеграла также имеет место свойство линейности, справедливы формулы замены переменной и интегрирования по частям, которые в силу формулы (29.52) вытекают из соответствующих свойств интегралов от функций действительного аргумента, принимающих только действительные значения.

Для непрерывных функций f определенный и неопределенный интегралы (29.51) и (29.52), как и в действительной области, связаны соотношением

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

ГЛАВА 3

РЯДЫ

§ 30. Числовые ряды

30.1. Определение ряда.

Определение 1. Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, где u_n, $s_n \in C$, $n = 1, 2, ...$,

$$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{30.1}$$

называется *рядом* (а также *бесконечной суммой*) и обозначается

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{30.2}$$

Элементы последовательности $\{u_n\}$ называются *членами ряда*, а элементы последовательности $\{s_n\}$ — его *частичными суммами.*

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{30.3}$$

то он называется *суммой ряда.* В этом случае ряд называется *сходящимся* и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Если последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ не стремится к конечному пределу, то ряд (30.2) называется *расходящимся.*

Очевидно, что

$$u_1 = s_1, \quad u_n = s_n - s_{n-1}, \quad n = 2, 3, ... \tag{30.4}$$

Из формул (30.1) и (30.4) видно, что каждая из последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$ однозначно определяет другую. Таким образом, чтобы задать ряд (30.2), достаточно задать одну из последовательностей $\{u_n\}$ или $\{s_n\}$. В этом смысле изучение рядов равносильно изучению последовательностей.

Часто нумерацию членов ряда производят не натуральными числами, а целыми, начиная с нуля, т. е. числами $0, 1, 2, ...$, а иногда — начиная с некоторого целого n_0, т. е. числами $n_0, n_0 + 1, ...$

Примеры. 1. Примером сходящегося ряда является ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \tag{30.5}$$

членами которого являются элементы геометрической прогрессии $\{q^n\}$, $q \in C$, $|q| < 1$. В самом деле, в этом случае

$$s_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n-1}}{1-q}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) =$$
$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Следовательно, ряд (30.5) при $|q| < 1$ сходится и

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

2. Примером расходящегося ряда является ряд, все члены которого равны единице: $u_n = 1$, $n = 1, 2, ...$ В этом случае $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty.$$

30.2. Свойства сходящихся рядов.

Теорема 1 (необходимые условия сходимости ряда). *Если ряд сходится, то последовательность его членов стремится к нулю.*

$\triangleright$ Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ его частичных сумм, то из равенства

$$u_n = s_n - s_{n-1}, \quad n = 2, 3, ...,$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \quad \triangleleft$$

Пример. Ряд (30.5), членами которого являются члены геометрической прогрессии $\{q^n\}$, в случае, когда знаменатель прогрессии q по абсолютной величине не менее единицы, т. е. $|q| \geqslant 1$, $q \in C$, расходится, так как последовательность его членов $\{q^n\}$ не стремится к нулю, ибо $|q^n| \geqslant 1$.

Теорема 2. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся, то для любых* $\lambda \in C$, $\mu \in C$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda u_n + \mu v_n$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

$\triangleright$ Положим $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda s_n + \mu \sigma_n.$$

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, т. е. существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то существует и конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \lim_{n\to\infty} s_n + \mu \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

что и означает справедливость утверждения теоремы. $\triangleleft$

Определение 2. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$$

называется *n-м остатком* данного ряда.

Если n-и остаток ряда сходится, то его сумму будем обозначать r_n, т. е.

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{30.6}$$

Теорема 3. *Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то сам ряд также сходится, причем, если*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}, \tag{30.7}$$

то при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$s = s_n + r_n. \tag{30.7}$$

$\triangleright$ Пусть s_n и $s_m^{(n)}$ являются соответственно n-й частичной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и m-й частичной суммой его остатка (30.6):

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad s_m^{(n)} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m};$$

тогда

$$s_{n+m} = s_n + s_m^{(n)}. \tag{30.8}$$

Поэтому при произвольно фиксированном n пределы $\lim\limits_{m\to\infty} s_{n+m}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} s_m^{(n)}$ одновременно существуют или не существуют. Существование первого из этих пределов означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, а существование второго — сходимость остатка (30.6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ этого ряда. Если оба рассматриваемых предела существуют, то, перейдя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (30.8), получим формулу (30.7). ◁

Отметим, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его остатки стремятся к нулю. Это сразу следует из формулы (30.7), так как сходимость ряда означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} r_n \underset{(30.7)}{=} \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = 0.$$

30.3. Критерий Коши.

Теорема 4 (критерий Коши сходимости ряда). *Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое n_0, что для всех $n > n_0$ и всех целых $p \geqslant 0$ имеет место неравенство*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{30.9}$$

▷ Это утверждение сразу следует из критерия Коши существования конечного предела последовательности, примененного к последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ данного ряда, ибо

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} = s_{n+p} - s_{n-1}. \quad ◁$$

Замечание. При $p = 0$ из теоремы следует, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|u_n| < \varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Таким образом, мы получим еще одно доказательство необходимого условия сходимости ряда (см. теорему 1).

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{30.10}$$

называемый *гармоническим*, и докажем, что он расходится. При любом натуральном n имеем

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}_{n \text{ слагаемых}} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому если $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, то для ряда (30.10) нельзя подобрать номера n_0, указанного в критерии Коши, так как при любом $n=1,2,\ldots$ и $p=n-1$ не выполняется условие (30.9). Следовательно, гармонический ряд расходится.

Отметим, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ членов гармонического ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Таким образом, условие стремления к нулю последовательности членов ряда, являясь необходимым условием сходимости ряда, не является достаточным для этого.

30.4. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Лемма 1. *Если члены ряда неотрицательны, то он сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.*

▷ Если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{30.11}$$

неотрицательны ($u_n \geqslant 0,\ n=1,2,\ldots$), то

$$s_{n+1}=s_n+u_{n+1}\geqslant s_n, \tag{30.12}$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ данного ряда возрастает, а возрастающая последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. ◁

Замечание 1. Если члены ряда (30.11) неотрицательны, то последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$, согласно (30.12), возрастает и, следовательно, всегда имеет конечный или бесконечный предел s, причем

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\sup_n s_n, \tag{30.13}$$

и поэтому

$$s_n\leqslant s,\quad n=1,2,\ldots \tag{30.14}$$

Если $s=+\infty$, то пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=+\infty$.

Замечание 2. Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда сходится по крайней мере одна подпоследовательность последовательности его частичных сумм. Действительно, последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами возрастает и потому всегда имеет конечный или бесконечный предел, совпадающий, конечно, с пределом любой ее подпоследовательности.

Теорема 5 (интегральный признак Коши сходимости ряда). *Если функция f неотрицательна и убывает на полупрямой $x \geqslant 1$, то для того чтобы ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (30.15)$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (30.16)$$

▷ В силу монотонности функции f на промежутке $[1, +\infty)$ она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[1, \eta]$, $\eta \in [1, +\infty)$, и потому имеет смысл говорить о несобственном интеграле (30.16).

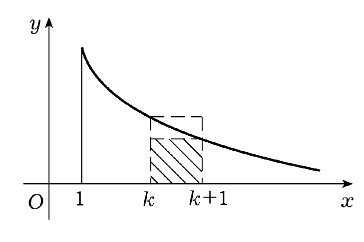


Рис. 122

Если

$$k \leqslant x \leqslant k+1, \quad k = 1, 2, ...,$$

то в силу убывания функции f будем иметь

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1).$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[k, k+1]$ длины 1 (рис. 122), получим

$$f(k)\int_k^{k+1} dx \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1)\int_k^{k+1} dx,$$

т. е.

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1).$$

Просуммировав получившиеся неравенства по k от 1 до n, придем к основному неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

т. е. к неравенству

$$s_{n+1} - f(1) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant s_n, \qquad (30.17)$$

где
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad n = 1, 2, ...$$

Если интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то из неравенства (30.17) в силу неотрицательности подынтегральной функции следует, что
$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty, \tag{30.18}$$
а поэтому последовательность частичных сумм s_n, $n = 1, 2, ...$, ряда (30.13) с неотрицательными членами ограничена сверху числом $f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Отсюда согласно лемме 1 следует, что этот ряд сходится.

Если же интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то в силу неотрицательности подынтегральной функции $f(x)$ имеем
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty, \tag{30.19}$$
а так как согласно неравенству (30.17)
$$s_n \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx,$$
то, перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \underset{(30.19)}{=} +\infty$. Это означает, что ряд (30.13) расходится. ◁

Для применения интегрального признака к исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами надо подобрать такую убывающую функцию f, что $f(n) = u_n$, $n = 1, 2, ...$, и затем исследовать сходимость интеграла (30.16).

Применим этот метод к исследованию сходимости рядов вида
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in R. \tag{30.20}$$

В этом случае при $\alpha \geqslant 0$ требуемой функцией, очевидно, является функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Поскольку интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то и ряд (30.20) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Расходимость ряда (30.20) при $\alpha < 0$ ясна непосредственно: последовательность его членов не стремится к нулю, ибо $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 1$ при $\alpha < 0$.

Теорема 6 (признак сравнения). *Пусть*

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{30.21}$$

Тогда:

1) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится*;

2) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Следствие. *Пусть* $u_n \geqslant 0$, $v_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l. \tag{30.22}$$

Тогда:

1) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится и* $0 \leqslant l < +\infty$, *то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *расходится и* $0 < l \leqslant +\infty$, *то расходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся и расходятся одновременно.*

▷ Доказательство теоремы. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, т. е. имеет конечную сумму $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, и $\sigma_n \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\sigma_n \underset{(30.14)}{\leqslant} \sigma. \tag{30.23}$$

Следовательно,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{(30.21)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} v_k = \sigma_n \underset{(30.23)}{\leqslant} \sigma, \tag{30.24}$$

а это в силу леммы означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, так как если бы он сходился, то в силу уже доказанного сходился бы и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. ◁

▷ Доказательство следствия. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится. Поскольку $l < +\infty$, то в силу условия (30.22) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{v_n} < l+1$, а следовательно, и неравенство

$$u_n < (l+1)v_n, \quad n > n_0. \tag{30.25}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (l+1)v_n$ (теорема 2), а поэтому по признаку сравнения (теорема 6) в силу неравенства (30.25) сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а тогда (см. теорему 3) сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. По условию $l > 0$; выберем число l' так, чтобы $0 < l' < l$. В силу условия (30.22) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{v_n} > l'$, а следовательно, и неравенство

$$u_n > l'v_n, \quad n > n_0. \tag{30.26}$$

Поскольку из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ вытекает, очевидно, и расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l'v_n$, то согласно второму утверждению теоремы 6 из неравенства (30.26) следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а потому и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. ◁

Заметим, что при применении признака сравнения для исследования сходимости ряда с неотрицательными членами в качестве ряда, с которым сравнивается данный ряд, часто бывает удобным брать ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ сходится, ибо

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, ...,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ расходится, ибо

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Теорема 7 (признак Даламбера). *Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \quad n = 1, 2, ..., \tag{30.27}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = l. \tag{30.28}$$

Тогда если $l < 1$, то ряд (30.27) *сходится, а если $l > 1$, то расходится.*

▷ Пусть сначала $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$. Тогда в силу условия (30.28) существует такой номер $n_0 > 1$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < q$ и, следовательно, неравенство $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для $, n = n_0 + 1, n_0 + 2, ...,$ получим

$$\begin{aligned} &u_{n_0+1} < qu_{n_0}, \\ &u_{n_0+2} < qu_{n_0+1} < q^2 u_{n_0}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &u_{n_0+k} < q^k u_{n_0}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k u_{n_0} = u_{n_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу условия $0 < q < 1$ сходится, поэтому, согласно признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а следовательно, и ряд (30.27).

Пусть теперь $l > 1$; тогда в силу условия (30.28) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, а поэтому и неравенство $u_n > u_{n-1}$. Применяя его последовательно

для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots,$ получим

$$u_{n+1} > u_n > \ldots > u_{n_0+1} > u_{n_0} > 0.$$

Поэтому последовательность членов ряда (30.27) не стремится к нулю, откуда и следует его расходимость. ◁

Теорема 8 (признак Коши). *Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geqslant 0, \tag{30.29}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \tag{30.30}$$

Тогда если $l < 1$, то ряд (30.29) *сходится, а если $l > 1$, то расходится.*

▷ Пусть сначала $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$. Тогда в силу условия (30.30) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$ и, следовательно, $u_n < q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а поэтому и ряд (30.29).

Если $l > 1$, то в силу условия (30.30) существует такой номер n_0, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1$, т. е. $u_n > 1$, и, следовательно, последовательность членов ряда (30.29) не стремится к нулю, поэтому этот ряд расходится. ◁

Примеры. 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится. Это устанавливается, например, с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится. Это сразу можно установить с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

5. Для ряда с общим членом $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^\alpha} = 1$$

(см. пример 4 в п. 13.2). Таким образом, при применении признаков Даламбера и Коши соответствующие пределы равны единице, т. е. при

помощи этих признаков нельзя определить, сходятся или расходятся рассматриваемые ряды. Среди них есть как сходящиеся при $\alpha > 1$, так и расходящиеся при $\alpha \leqslant 1$. Иначе говоря, среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, имеются как сходящиеся $\left(\text{например, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}\right)$, так и расходящиеся $\left(\text{например, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\right)$ ряды.

30.5. Знакочередующиеся ряды.

Теорема 9 (Лейбниц). *Если последовательность* $\{u_n\}$ *убывает и стремится к нулю, т. е.*

$$u_n \geqslant u_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{30.31}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{30.32}$$

сходится, причем, если $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k$, *то при любом* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$|s_n - s| \leqslant u_{n+1}. \tag{30.33}$$

Прежде всего отметим, что из условия (30.31) следует, что

$$u_n \geqslant 0, \tag{30.34}$$

в силу чего члены ряда (30.32) поочередно то $\geqslant 0$, то $\leqslant 0$.

Ряды вида (30.32) при $u_n > 0$ называются *знакочередующимися.*

$\triangleright$ Частичные суммы с четными номерами ряда (30.32) возрастают и неотрицательны. В самом деле,

$$s_{2n+2} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) = \\ = s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geqslant s_{2n} \geqslant 0, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{30.35}$$

ибо в силу убывания последовательности $\{u_n\}$ значения всех выражений, стоящих в круглых скобках, неотрицательны. Кроме того, последовательность $\{s_{2n}\}$ ограничена сверху:

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leqslant u_1, \tag{30.36}$$

ибо

$$u_k - u_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u_{2n} \underset{(30.34)}{\geqslant} 0.$$

Поскольку последовательность $\{s_{2n}\}$ возрастает и ограничена

сверху, то она имеет конечный предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}, \tag{30.37}$$

при этом из неравенств (30.35) и (30.36) следует, что (рис. 123)

$$0 \leqslant s \leqslant u_1. \tag{30.38}$$

Рис. 123

Покажем, что тот же предел имеет и последовательность частичных сумм с нечетными номерами. Действительно,

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1},$$
$$\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} \underset{(30.31)}{=} 0,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} \underset{(30.37)}{=} s. \tag{30.39}$$

Из (30.37), (30.39) следует, что последовательность $\{s_n\}$ всех частичных сумм ряда (30.32) имеет конечный предел s, т. е. этот ряд сходится, и s является его суммой.

Докажем неравенство (30.33). Имеем

$$s - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k+1} u_{n+k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_{n+k},$$

где в правой части стоит ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_{n+k}$. Применив к нему неравенство (30.38), получим

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_{n+k} \leqslant u_{n+1},$$

поэтому

$$|s - s_n| = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_{n+k} \leqslant u_{n+1}. \quad \triangleleft$$

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится. Это сразу следует из теоремы 9.

Замечание. Выше (см. следствие теоремы 6 в п. 30.4) было показано, что если у двух знакопостоянных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ их члены эквивалентны: $u_n \sim v_n$, $n \to \infty$ (см. (30.22)), то они одновременно сходятся или расходятся. Для не знакопостоянных рядов аналогичное утверждение уже не имеет места. Например, если

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=1,$$

т. е. $u_n \sim v_n,\ n\to\infty$. Однако в силу признака Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ расходится, ибо расходится гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Очевидно, что $\frac{1}{n}=o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),\ n\to\infty$. Таким образом, добавляя к членам ряда бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с членами ряда, можно изменить сходимость ряда: из сходящегося ряда получить расходящийся.

30.6. Абсолютно сходящиеся ряды.

Определение 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad u_n\in C, \tag{30.40}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, членами которого являются абсолютные величины членов данного ряда, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \tag{30.41}$$

сходится.

Теорема 10 (критерий Коши абсолютной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* (30.40) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое* n_0, *что для всех номеров* $n>n_0$ *и всех* $p=0,1,\ldots$ *выполнялось бы неравенство*

$$\sum_{k=0}^{p}|u_{n+k}|<\varepsilon.$$

▷ Это сразу следует из определения абсолютно сходящегося ряда и критерия Коши сходимости ряда (теорема 4 из п. 30.3). ◁

Теорема 11. *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

▷ Это следует из неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{p}u_{n+k}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{p}|u_{n+k}|. \tag{30.42}$$

В самом деле, в силу критерия Коши абсолютной сходимости ряда (30.40) для любого $\varepsilon>0$ существует такое n_0, что для всех $n>n_0$ и всех $p\geqslant 0$ правая часть неравенства (30.42) меньше ε. Следовательно,

и левая часть этого неравенства окажется меньше ε, т. е. для ряда (30.40) выполняется критерий Коши сходимости рядов, и потому ряд (30.40) сходится. ◁

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}$ абсолютно, а значит, и просто сходится. Это следует из равенства $\left|\frac{i^n}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$ и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится (см. п. 30.5), но не абсолютно, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится (см. п. 30.3).

Теорема 12. *Линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов является абсолютно сходящимся рядом.*

▷ Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, а $\lambda, \mu \in C$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda||u_n| + |\mu||v_n|$. Отсюда в силу неравенств

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda||u_n| + |\mu||v_n|, \quad n = 1, 2, ...,$$

по признаку сравнения (см. теорему 6) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda u_n + \mu v_n|$, т. е. абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n)$. ◁

Теорема 13. *Если ряд* (30.40) *абсолютно сходится, то любой ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^*, \tag{30.43}$$

составленный из тех же членов, что и данный ряд, но взятых, вообще говоря, в другом порядке, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

▷ Пусть ряд (30.40) абсолютно сходится. Докажем, во-первых, что ряд (30.43) сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (30.40), а во-вторых, что ряд (30.43) абсолютно сходится. Пусть

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s_m^* = \sum_{k=1}^{m} u_k^*, \quad \widetilde{s} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \widetilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной сходимости ряда (30.40) существует такой номер n_0, что

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| = \widetilde{s} - \widetilde{s}_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{30.44}$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$|s - s_{n_0}| = \Bigl| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} u_n \Bigr| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30.45}$$

Выберем номер m_0 так, чтобы частичная сумма $s^*_{m_0}$ ряда (30.43) содержала в качестве своих слагаемых все члены ряда (30.40), входящие в сумму s_{n_0}. Для всякого $m > m_0$ положим

$$s^{**}_m = s^*_m - s_{n_0}. \tag{30.46}$$

В силу выбора номера m_0 слагаемыми суммы $s^{**}_{m_0}$ являются члены ряда (30.40) с номерами, большими n_0. Поскольку абсолютная величина суммы s^{**}_m не превышает абсолютных величин ее слагаемых, то

$$|s^{**}_m| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| \underset{(30.44)}{<} \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30.47}$$

Поэтому при $m > m_0$ будем иметь

$$|s - s^*_m| \underset{(30.46)}{=} |s - (s_{n_0} + s^{**}_m)| \leqslant |s - s_{n_0}| + |s^{**}_m| \underset{\substack{(30.45)\\(30.47)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{m\to\infty} s^*_m = s$. Иначе говоря, ряд (30.43) сходится и его сумма равна s, т. е. равна сумме ряда (30.40):

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^*_m = s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Второе утверждение — абсолютная сходимость ряда (30.43) — следует из уже доказанного первого утверждения, если его применить к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{30.48}$$

В самом деле, если ряд (30.40) абсолютно сходится, то сходится ряд (30.48), причем он, очевидно, сходится абсолютно, так как его члены неотрицательны. Поэтому согласно доказанному сходится и любой ряд, получающийся перестановкой членов ряда (30.48), в частности, сходится ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |u^*_m|$. А это и означает, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u^*_m$ абсолютно сходится. $\triangleleft$

Теорема 14. *Если ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{30.49}$$

абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, также абсолютно сходится, причем его сумма s равна произведению сумм данных рядов: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s', \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'', \tag{30.50}$$

то

$$s = s's''. \tag{30.51}$$

Коротко говоря, утверждение теоремы означает, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно.

▷ Докажем абсолютную сходимость ряда, составленного из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов рядов (30.49). Заметим, что если будет показано, что ряд из этих произведений абсолютно сходится при каком-то их порядке, то согласно предыдущей теореме отсюда будет следовать, что он абсолютно сходится и при любом другом порядке своих членов. Поэтому расположим произведения $u_m v_n$ в конкретном порядке, удобном для доказательства теоремы. Для описания этого порядка составим следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccccc} u_1v_1 & u_1v_2 & \ldots & u_1v_n & \ldots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \ldots & u_2v_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \ldots & u_mv_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{30.52}$$

Рассмотрим составленный из элементов таблицы (30.52) ряд

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \ldots, \tag{30.53}$$

в котором порядок членов выбран согласно нумерации элементов таблицы (30.52) по схеме

$$\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 5 & \cdots & \cdots \\ 4 & 3 & 6 & \cdots & \cdots \\ \hline 9 & 8 & 7 & \cdots & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{30.54}$$

Докажем абсолютную сходимость ряда (30.53), т. е. сходимость ряда

$$|u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + \ldots \tag{30.55}$$

Положим

$$\widetilde{s}\,' = \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad \widetilde{s}\,'' = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|, \quad \widetilde{s}\,'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad \widetilde{s}\,''_n = \sum_{k=1}^{n} |v_k|,$$

а через $\widetilde{s}_n$ обозначим частичные суммы ряда (30.55). Тогда

$$\widetilde{s}_{n^2} \underset{(30.55)}{=} |u_1||v_1| + |u_1||v_2| + |u_2||v_2| + |u_2||v_1| + \ldots + |u_n||v_1| =$$
$$= (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_1| + \ldots + |v_n|) = \widetilde{s}\,'_n \widetilde{s}\,''_n. \quad (30.56)$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{s}_{n^2} = \widetilde{s}\,'\widetilde{s}\,''.$$

Но последовательность $\{\widetilde{s}_n\}$ всех частичных сумм ряда (30.55) в силу неотрицательности его членов возрастает и потому имеет предел, конечный или бесконечный, совпадающий, конечно, с пределом любой ее подпоследовательности, в частности, с пределом $\widetilde{s}$ подпоследовательности $\{\widetilde{s}_{n^2}\}$. Таким образом, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{s}_n = \widetilde{s} = \widetilde{s}\,'\widetilde{s}\,'',$$

т. е. ряд (30.53) абсолютно сходится, и, следовательно, абсолютно сходится любой ряд, полученный перестановкой его членов.

Докажем теперь формулу (30.51). Обозначим через s_n частичные суммы ряда (30.53) и положим

$$s'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad s''_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Аналогично (30.56) имеем

$$s_{n^2} = (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n) = s'_n s''_n. \quad (30.57)$$

Поскольку уже доказано, что ряд (30.53) абсолютно, а следовательно, и просто сходится, то существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s. \quad (30.58)$$

Поэтому

$$s \underset{(30.58)}{=} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n^2} \underset{(30.57)}{=} \lim_{n\to\infty} s'_n s''_n = \lim_{n\to\infty} s'_n \lim_{n\to\infty} s''_n \underset{(30.50)}{=} s's''. \triangleleft$$

30.7. Условно сходящиеся ряды.

Определение 4. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется *условно сходящимся рядом.*

Примером условно сходящегося ряда является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (пример 2 из п. 30.6).

Для ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{30.59}$$
с действительными членами обозначим через $u_1^+, u_2^+, ..., u_n^+, ...$ и $-u_1^-, -u_2^-, ..., -u_n^-, ...$ соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде (30.59). Очевидно, $u_n^- > 0$, $n = 1, 2, ...$

Если одно из множеств $\{u_n^-\}$ или $\{u_n^+\}$ окажется конечным, то, отбросив в ряде (30.59) соответствующее конечное число первых членов (от чего сходимость ряда не нарушится), получим остаток ряда, члены которого будут неотрицательны или неположительны и, следовательно, во втором случае неотрицательны после умножения всех членов на -1. И в том, и в другом случае, если исходный ряд сходится, то он очевидным образом абсолютно сходится. Таким образом, если ряд (30.59) условно сходится, то оба множества $\{u_n^+\}$ и $\{u_n^-\}$ бесконечны, т. е. являются последовательностями. Рассмотрим ряды
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \tag{30.60}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \tag{30.61}$$

Согласно определению члены этих рядов u_n^+ и u_n^- неотрицательны, поэтому если они расходятся, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = +\infty.$$

Лемма 2. *Если ряд* (30.59) *условно сходится, то оба ряда* (30.60) *и* (30.61) *расходятся.*

▷ Положим
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \widetilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} u_k^+, \quad s_n^- = \sum_{k=1}^{n} u_k^-.$$
Поскольку все слагаемые последних трех сумм $\widetilde{s}_n$, s_n^+ и s_n^- неотрицательны, то последовательности этих сумм возрастают и, следовательно, имеют конечные или бесконечные пределы.

Суммы s_n и $\widetilde{s}_n$ можно представить в виде
$$s_n = \sum_{i=1}^{k} u_i^+ - \sum_{j=1}^{m} u_j^- = s_k^+ - s_m^-, \tag{30.62}$$
$$\widetilde{s}_n = \sum_{j=1}^{k} u_i^+ + \sum_{i=1}^{m} u_j^- = s_k^+ + s_m^- \tag{30.63}$$

(для заданного ряда m и k зависят от $n = k + m$); при этом условие стремления n к бесконечности равносильно стремлению к бесконечности каждого из индексов m и k. Действительно, если бы при $n \to \infty$ номера $m = m(n)$ (соответственно $k = k(n)$) не стремились к бесконечности, то это означало бы, что в ряде (30.59) имеется лишь конечное число неотрицательных (соответственно отрицательных) членов, а в этом случае ряд (30.59) абсолютно сходился бы, что противоречило бы его условной сходимости. То, что при $k \to \infty$ (соответственно при $m \to \infty$) имеет место $n \to \infty$, очевидно в силу равенства $n = k + m$.

В силу сходимости ряда (30.59) последовательность $\{s_n\}$ сходится. Если бы сходилась одна из последовательностей $\{s_k^+\}$ или $\{s_m^-\}$ (т. е. сходился бы один из рядов (30.60) или (30.61)), то из равенства (30.62) следовало бы, что сходится и другая, а тогда в силу равенства (30.63) оказалось бы, что сходится последовательность $\{\widetilde{s}_n\}$. Это же означает абсолютную сходимость ряда (30.59), что противоречит сделанному предположению. Поэтому ряды (30.60) и (30.61) расходятся. ◁

Теорема 15 (Риман). *Если ряд с действительными членами условно сходится, то, каково бы ни было действительное число s, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна s.*

▷ Пусть члены ряда (30.59) — действительные числа, и пусть произвольно задано число s. Рассмотрим ряды (30.60) и (30.61) Наберем из (30.60) подряд столько членов, чтобы их сумма превышала s и чтобы сумма меньшего числа этих членов была не больше s. Точнее, обозначим через n_1 наименьшее натуральное число, при котором выполняется условие

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > s. \tag{30.64}$$

Тогда при $n_1 > 1$ имеет место неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant s. \tag{30.65}$$

Возможность выбора такого числа n_1 следует из расходимости ряда (30.60).

Наберем теперь из (30.61) подряд столько членов, чтобы, вычтя их сумму из суммы уже набранных из ряда (30.60) членов, получить значение, меньшее s, и чтобы меньшее число указанных членов ряда (30.61) не обладало этим свойством. Точнее, обозначим через n_2 такое наименьшее натуральное число n_2, что

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < s, \tag{30.66}$$

и если $n_2 > 1$, то

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant s. \tag{30.67}$$

Существование такого числа n_2 следует из расходимости ряда (30.61).

Далее обозначим через n_3 такое наименьшее натуральное число, что

$$u_1^+ + ... + u_{n_1}^+ - u_1^- - ... - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + ... + u_{n_3}^+ > s,$$

и если $n_3 > n_1 + 1$, то

$$u_1^+ + ... + u_{n_1}^+ - u_1^- - ... - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + ... + u_{n_3-1}^+ \leqslant s.$$

Очевидно, всегда $n_3 > n_1$. Продолжая этот процесс, т. е. набирая соответствующие суммы членов поочередно то из ряда (30.60), то из ряда (30.61), получим ряд

$$u_1^+ + ... + u_{n_1}^+ - u_1^- - ... - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + ... + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - ... - u_{n_4}^- + ... \tag{30.68}$$

Обозначим через s_n, $n = 1, 2, ...$, частичные суммы этого ряда. В силу выбора номеров $n_1, n_2, n_3, n_4, ...$ будем иметь

$$\begin{array}{llll} s_{n_1} > s, & \text{и если} \quad n_1 > 1, & \text{то} & s_{n_1-1} \leqslant s, \\ s_{n_1+n_2} < s, & \text{и если} \quad n_2 > 1, & \text{то} & s_{n_1+n_2-1} \geqslant s, \\ s_{n_2+n_3} > s, & \text{и если} \quad n_3 > n_1 + 1, & \text{то} & s_{n_2+n_3-1} \leqslant s, \\ s_{n_3+n_4} < s, & \text{и если} \quad n_4 > n_2 + 1, & \text{то} & s_{n_3+n_4-1} \geqslant s, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \end{array} \tag{30.69}$$

$$n_1 < n_3 < ... < n_{2k+1} < ..., \qquad n_2 < n_4 < ... < n_{2(k+1)} < ...,$$
$$k = 0, 1, 2, ...$$

Их этих неравенств следует, что частичная сумма вида $s_{n_m+n_{m+1}}$ отличается от числа s не более чем на абсолютную величину последнего ее члена, т. е. для всех $m = 1, 2, ...$ имеют место неравенства

$$|s_{n_m+n_{m+1}} - s| \leqslant u_{n_{m+1}}^{\pm}, \tag{30.70}$$

где $u_{n_{m+1}}^{\pm}$ является абсолютной величиной последнего слагаемого суммы $s_{n_m+n_{m+1}}$ (член $u_{n_{m+1}}^{\pm}$ может принадлежать как ряду (30.60), так и ряду (30.61), поэтому в качестве верхнего индекса написано $\pm$).

По условию ряд (30.59) сходится, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Отсюда в силу неравенства (30.70) получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} s_{n_m+n_{m+1}} = s. \tag{30.71}$$

Для любой же частичной суммы s_n ряда (30.68) в силу его построения существует такое m, что выполняется либо неравенство

$$s_{n_{m-1}+n_m} \leqslant s_n \leqslant s_{n_m+n_{m+1}},$$

либо

$$s_{n_{m-1}+n_m} \geqslant s_n \geqslant s_{n_m+n_{m+1}}.$$

Поэтому из равенства (30.71) следует, что и последовательность всех частичных сумм s_n ряда (30.68) имеет своим пределом число s:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

т. е. число s является суммой ряда (30.68). ◁

Теорема Римана показывает, что одно из основных свойств конечных сумм чисел — независимость их суммы от порядка слагаемых (коммутативность сложения) — не переносится на сходящиеся ряды, т. е. на бесконечные суммы: если ряд сходится, но не абсолютно, то его сумма зависит от порядка слагаемых.

Отметим, что и ассоциативный закон сложения непосредственно не переносится на ряды; так, например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

расходится, а ряды

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots,$$
$$1 - (1-1) - (1-1) - \ldots - (1-1) - \ldots,$$

полученные из него указанным объединением его членов, сходятся; при этом сумма первого ряда равна 0, а второго 1.

30.8*. Признаки сходимости рядов Дирихле и Абеля. Рассмотрим одно преобразование конечных сумм вида $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j$, принадлежащее Абелю и часто весьма полезное при исследовании сходимости рядов.

Пусть $a_j \in C$, $b_j \in C$, $B_j = b_1 + \ldots + b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и, следовательно, $b_1 = B_1$, $b_j = B_j - B_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots, n$. Тогда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$
$$= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{(n-1)} + a_nB_n,$$

или, используя знак суммирования,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) B_j + a_n B_n. \qquad (30.72)$$

Это равенство называется *преобразованием Абеля* суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j$. Если его переписать в виде

$$\sum_{j=2}^{n} a_j (B_j - B_{j-1}) = a_n B_n - a_1 B_1 - \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) B_j,$$

то видно, что его можно рассматривать как дискретный аналог интегрирования по частям.

В дальнейшем числа a_j будут действительными, а b_j, вообще говоря, комплексными.

Лемма 3 (Абель). *Если для всех* $j = 1, 2, ..., n-1$ *выполняются неравенства*

$$a_j \leqslant a_{j+1} \quad \textit{или} \quad a_j \geqslant a_{j+1}, \tag{30.73}$$

и для всех $j = 1, 2, ..., n$ — *неравенства*

$$|b_1 + b_2 + ... + b_j| \leqslant B, \tag{30.74}$$

то

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big| \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{30.75}$$

▷ Имеем

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big| \underset{(30.72)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{j+1}||B_j| + |a_n||B_n| \underset{(30.74)}{\leqslant}$$
$$\underset{(30.74)}{\leqslant} B\Big(\sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| + |a_n|\Big) \underset{(30.73)}{=} B\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n-1}(a_j - a_{j+1})\Big| + |a_n|\Big) =$$
$$= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|).$$

Мы воспользовались здесь очевидным равенством

$$\sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| = |(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_{n-1} - a_n)| = |a_1 - a_n|. \lhd$$

Теорема 16 (признак Дирихле). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *монотонная и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{30.76}$$

а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *ограничена, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{30.77}$$

сходится.

▷ Из ограниченности последовательности частичных сумм $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $n = 1, 2, ...,$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует, что существует такое число $B > 0$, что для всех $n = 1, 2, ...$ выполняются неравенства $|B_n| \leqslant B$ и, следовательно, для всех $n = 2, 3, ...$ и всех $p = 0, 1, ...$ — неравенства

$$\Big|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}\Big| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leqslant 2B. \tag{30.78}$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу условия (30.76) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \tag{30.79}$$

Поэтому для всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \underset{\substack{(30.75)\\(30.78)}}{\leqslant} 2B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \underset{(30.79)}{<} 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B}\right) = \varepsilon,$$

т. е. ряд (30.77) удовлетворяет критерию Коши сходимости рядов и, следовательно, сходится. ◁

Теорема 17 (признак Абеля). *Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена и монотонна, а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{30.80}$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{30.81}$$

▷ Из ограниченности и монотонности последовательности $\{a_n\}$ следует существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, и потому последовательность $\{a_n - a\}$ монотонная и стремится к нулю. Из сходимости же ряда (30.80) следует, что последовательность $\{B_n\}$ его частичных сумм $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограниченная. Теперь имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - a) + a] b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Второй ряд в правой части равенства сходится по условию теоремы, а первый — в силу признака Дирихле. Поэтому сходится и ряд, стоящий в левой части равенства, т. е. ряд (30.81). ◁

Примеры. 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \tag{30.82}$$

сходится. Действительно, последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, монотонно убывая, стремится к нулю, а

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha\right] =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \ldots$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|},$$

т. е. при $\alpha \neq 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, все рассматриваемые суммы ограничены. Отсюда в силу признака Дирихле следует, что при $\alpha \neq 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, ряд (30.82) сходится. Он сходится, очевидно, и при $\alpha = 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, так как в этом случае все члены его обращаются в нуль.

Итак, ряд (30.82) сходится при всех $\alpha \in R$.

2. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \cos\frac{\pi}{n} \tag{30.83}$$

сходится по признаку Абеля, ибо сходится ряд (30.82), а последовательность $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ ограниченна и монотонна.

30.9. Исследование сходимости рядов методом выделения главной части ряда. Для того чтобы выяснить, сходится или расходится данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, бывает полезно разложить с помощью формулы Тейлора члены ряда u_n по степеням $\frac{1}{n^\alpha}$ при подходящем показателе $\alpha > 0$, т. е. представить u_n в виде (см. п. 14.2)

$$u_n = a_{n,0} + \frac{\alpha_{n,1}}{n^\alpha} + \ldots + \frac{a_{n,m-1}}{n^{(m-1)\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{m\alpha}}\right), \quad n \to \infty, \tag{30.84}$$

где число m выбрано так, что $m\alpha > 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ с членами $v_n = O\left(\frac{1}{n^{m\alpha}}\right)$ сходится абсолютно по признаку сравнения, так как существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|v_n| \leqslant \frac{c}{n^{m\alpha}}$ (см. (9.20)), и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^{m\alpha}}$, $m\alpha > 1$, сходится.

Таким образом, сходимость данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сводится к исследованию сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n,k}}{n^{k\alpha}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Примеры. 1. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln\cos\frac{1}{n}$. Используя разложение функций cos и ln по формуле Тейлора (см. п. 14.2), получим

$$u_n = \ln\Big(1 - \frac{1}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big) = -\frac{1}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big) + O\Big(\Big(-\frac{1}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big)^2\Big) = -\frac{1}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \quad n \to \infty.$$

Поскольку ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$ сходятся, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{n}.$$

2. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Имеем

$$u_n = \ln\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \ln\Big(1 - \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + O\Big(\Big(-\frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)^2\Big) = -\frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ сходится, поэтому данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

расходится.

3. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)$. Заметим, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0;$$

в частности, при $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ имеем

$$u_n = \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) = a_n + b_n + c_n, \tag{30.85}$$

где

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2n}, \quad c_n = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big), \quad n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ знакочередующийся; он сходится по признаку Лейбница. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, так как он только постоянным множи-

телем $-\frac{1}{2}$ отличается от гармонического ряда, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

Поэтому в силу равенства (30.85) данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

расходится.

Таким образом, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ являются еще одним примером рядов, члены которых эквивалентны: $u_n = a_n + o(a_n)$, $n \to \infty$, но один из них сходится, а другой расходится (см. замечание в п. 30.5).

30.10. Суммирование рядов методом средних арифметических. Если заданный числовой ряд расходится, то иногда оказывается полезным определить сумму ряда не обычным способом — как предел его частичных сумм — а каким-либо другим. Рассмотрим один из таких способов, называемый *суммированием рядов методом средних арифметических.*

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in C$, составим из его частичных сумм s_n их средние арифметические

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, то заданный ряд называется *суммируемым методом средних арифметических к числу σ.*

Пример. Расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ суммируется методом средних арифметических к числу $\frac{1}{2}$.

В самом деле, в этом случае $s_{2n} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$.

Таким образом, если под $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ понимать число, к которому этот ряд суммируется методом средних арифметических, то получится равенство

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{30.86}$$

Замечательно то, что если в формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1,$$

для суммы геометрической прогрессии $\{(-1)^n x^n\}$ подставить $x = 1$, то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2},$$

т. е. снова формулу (30.86).

Понятие суммируемости ряда методом средних арифметических является обобщением понятия сходимости ряда, так как, с одной стороны, существуют расходящиеся ряды, суммируемые методом средних арифметических, а с другой — всякий сходящийся ряд суммируем методом средних арифметических к своей сумме. Покажем это.

Лемма 4. *Если последовательность $z_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится, то последовательность средних арифметических ее членов*

$$w_n = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{30.87}$$

также сходится, и притом к тому же пределу, что и сама последовательность $\{z_n\}$.

$\triangleright$ Пусть $\lim z_n = z_0$. Для любых натуральных чисел n_0 и $n > n_0$ выполняется следующее тождество:

$$w_n - z_0 \underset{(30.86)}{=} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} - z_0 =$$
$$= \frac{z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n} + \frac{(z_{n_0+1} - z_0) + \ldots + (z_n - z_0)}{n}. \tag{30.88}$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела последовательности существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30.89}$$

Поскольку $z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0$ — фиксированное число, а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то существует такой номер m_0, что для всех $n > m_0$ выполняется неравенство

$$\frac{z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30.90}$$

Если теперь $n_\varepsilon = \max\{n_0, m_0\}$ и $n > n_0$, то

$$|w_n - z_0| \underset{(30.88)}{\leqslant} \left|\frac{z_1 + \ldots + z_n - n_0 z}{n}\right| + \left|\frac{(z_{n_0+1} - z_0) + \ldots + (z_n - z_0)}{n}\right| \underset{\substack{(30.89)\\(30.90)}}{<}$$
$$\underset{\substack{(30.89)\\(30.90)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z_0$. $\triangleleft$

Теорема 18. *Если ряд сходится, то он суммируется методом средних арифметических к своей сумме.*

▷ Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ означает, что последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$ имеет конечный предел, а тогда, согласно лемме 4, и последовательность средних арифметических $\{\sigma_n\}$ членов последовательности $\{s_n\}$ имеет тот же предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n. \quad \triangleleft$$

§ 31. Функциональные последовательности и ряды

31.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов. Пусть на некотором множестве X (произвольной природы) задана последовательность функций

$$f_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{31.1}$$

принимающих числовые значения (вообще говоря, комплексные, в частности, только действительные). Элементы множества X будем называть *точками.*

Последовательность (31.1) называется *ограниченной на множестве* X, если существует такое число $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, ...$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant c.$$

Последовательность (31.1) называется *сходящейся на множестве* X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится.

Если последовательность (31.1) сходится на множестве X, то функция f, определенная при каждом $x \in X$ равенством

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

называется *пределом последовательности* (31.1).

Пусть на множестве X задана последовательность числовых функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, ...$ Множество всех числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, в каждом из которых точка $x \in X$ произвольно фиксирована, называется *рядом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{31.2}$$

на множестве X, а функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, ...,$ — *его членами.*

Аналогично случаю числовых рядов сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X,$$

называется *частичной суммой ряда* (31.2) *n-го порядка*, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ — его *n-м остатком.*

Ряд (31.2) называется *сходящимся на множестве* X, если последовательность $\{s_n(x)\}$ его частичных сумм сходится на этом множестве. При этом предел частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x), \quad x \in X,$$

называется *суммой ряда* (31.2). В этом случае пишут

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

и говорят, что *функция $s(x)$ раскладывается в ряд* (31.2).

Если ряд (31.2) при любом фиксированном $x \in X$ сходится абсолютно, то он называется *абсолютно сходящимся на множестве X.*

Примеры. 1. Рассмотрим ряд, членами которого являются функции

$$u_n(z) = \frac{z^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

определенные на комплексной плоскости C, т. е. ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..., \quad z \in C. \tag{31.3}$$

Исследуем абсолютную сходимость этого ряда при фиксированном z с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Таким образом, при любом $z \in C$ ряд (31.3) абсолютно, а следовательно, и просто сходится; иначе говоря, ряд (31.3) сходится, и притом абсолютно, на всей комплексной плоскости.

2. Рассмотрим ряд

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + ... + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + ..., \quad x \in R. \tag{31.4}$$

При $x = 0$ все его члены обращаются в нуль и, следовательно, его сумма $s(x)$ также равна нулю:

$$s(0) = 0. \tag{31.5}$$

При $x \neq 0$ ряд (31.4) представляет собой сумму членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1,$$

и поэтому

$$s(x) = \frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1. \qquad (31.6)$$

Из формул (31.5) и (31.6) следует, что ряд (31.4) сходится на всей числовой оси и его сумма

$$s(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{при} & x \neq 0 \\ 0 & \text{при} & x = 0 \end{array} \right\} = |\operatorname{sign} x|$$

оказывается разрывной в точке $x = 0$ функцией (см. рис. 60), хотя все его члены, очевидно, непрерывны на всей числовой оси.

Этот пример показывает, что сумма сходящегося и даже абсолютно сходящегося на некотором множестве ряда (члены ряда (31.4) неотрицательны, и потому ясно, что он абсолютно сходится), все члены которого непрерывны, может оказаться разрывной функцией. Таким образом, на сходящиеся и даже на абсолютно сходящиеся ряды функций не переносится свойство конечных сумм: сумма конечной совокупности непрерывных на некотором множестве функций также непрерывна на нем. Для того чтобы описать ряды функций, на которые переносится это свойство, введем понятие равномерно сходящихся рядов.

31.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Определение 1. Функциональная последовательность (31.1) называется *равномерно сходящейся к функции f на множестве X*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех точек $x \in X$ и всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (31.7)$$

Очевидно, что если последовательность (31.1) равномерно сходится на множестве X к функции f, то эта последовательность сходится к функции f на рассматриваемом множестве (определение сходимости последовательности функций на множестве см. в п. 31.1).

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве X к функции f, то пишут

$$f_n \underset{X}{\rightarrow} f,$$

а если эта последовательность сходится равномерно к f на указанном множестве, то пишут

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

В символической записи определения сходящейся и равномерно сходящейся на множестве последовательности выглядят соответст-

венно следующим образом:

$$f_n \underset{X}{\to} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если последовательность $\{f_n\}$ только сходится к функции f на множестве X, то для каждой точки $x \in X$ существует, вообще говоря, свой номер $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, для которого при $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

и может оказаться, что для всех точек $x \in X$ невозможно подобрать общий номер n_0, обладающий указанным свойством.

Равномерная же сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни задать, можно подобрать такой номер n_0, что в любой точке $x \in X$ значение функции f_n будет отличаться от значения функции f меньше, чем на ε (рис. 124).

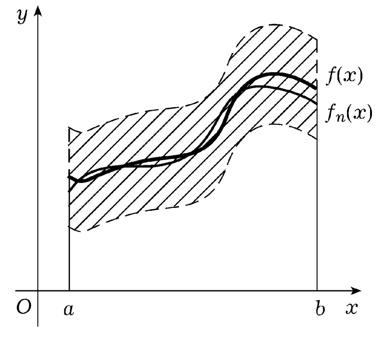


Рис. 124

Лемма 1. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на X к функции f, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0. \qquad (31.8)$$

Значение этой леммы состоит в том, что она сводит понятие равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n\}$ к понятию сходимости числовой последовательности

$$\left\{\sup_X |f_n(x) - f(x)|\right\}$$

(“числовой” в широком смысле этого слова: конечное число членов указанной последовательности может обратиться в $+\infty$). В силу этого обстоятельства условие (31.8) часто бывает удобно использовать для выяснения, сходится ли равномерно интересующая нас конкретная последовательность функций.

$\triangleright$ 1. Пусть

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, а следовательно, для всех $n > n_0$ — неравенство

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (31.8).

2. Пусть выполнено условие (31.8). Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда в силу определения предела числовой последовательности существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а следовательно, для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ — неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f. \quad \triangleleft$$

С л е д с т в и е. *Если существует стремящаяся к нулю последовательность* $\{\alpha_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

такая, что для всех $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n, \tag{31.9}$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* X.

$\triangleright$ Действительно, поскольку неравенство (31.9) выполняется для всех $x \in X$, то

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n,$$

а поэтому из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad \triangleleft$$

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что из определения равномерной сходимости последовательности функций следует, что если какие-то последовательности равномерно сходятся на некотором множестве, то и любая их конечная линейная комбинация равномерно сходится на этом множестве.

П р и м е р ы. 1. Пусть $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $X = [0, q]$, $0 < q < 1$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [0, q]$, существует и равен нулю:

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Так как $\sup\limits_{[0,q]} x^n = q^n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,q]} x^n = \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Следовательно, согласно лемме 1, последовательность $\{x^n\}$ равномерно сходится к нулю на отрезке $[0, q]$:

$$x^n \underset{[0,q]}{\rightrightarrows} 0, \quad 0 < q < 1.$$

2. Рассмотрим теперь последовательность функций $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, ...$, на полуинтервале $X = [0, 1)$. Здесь снова

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1),$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится на полуинтервале $[0, 1)$ к функции, равной нулю:

$$x_n \underset{[0,1)}{\to} 0,$$

однако $\sup\limits_{[0,1)} x^n = 1$, и потому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,1)} x_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

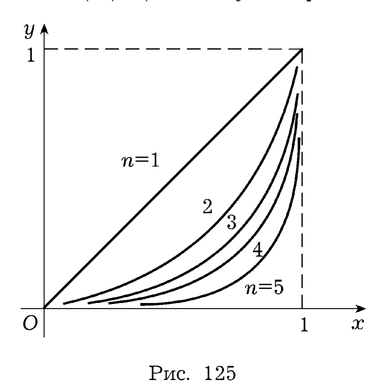


Рис. 125

Следовательно, согласно той же лемме сходящаяся на полуинтервале $[0, 1)$ последовательность $\{x^n\}$ не сходится на нем равномерно (рис. 125):

$$x_n \underset{[0,1)}{\not\rightrightarrows} 0.$$

3. Последовательность $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, ...$, сходится и на отрезке $[0, 1]$, но уже к разрывной функции

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1. \end{cases}$$

Поскольку последовательность $\{x^n\}$ не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$, то она не сходится равномерно и на отрезке $[0, 1]$. Это следует из того, что если неравенство (31.7) не выполняется на каком-то множестве X (в данном случае на $[0, 1)$), то оно, очевидно, не выполняется и на всяком множестве, содержащем в себе X.

Рассмотренная последовательность является еще одним примером сходящейся последовательности непрерывных функций, предел которой уже не является непрерывной функцией (первым примером такого рода у нас была последовательность частичных сумм ряда (31.4)). Ниже будет показано, что если потребовать, чтобы последовательность не только сходилась, но и равномерно сходилась, то подобная ситуация будет уже невозможной (теоремы 7 и 7′).

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Для того чтобы последовательность f_n равномерно сходилась на множестве X к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_0, что для всех $x \in X$, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, ...$ выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

В символической записи это условие выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0 \quad \forall p \geqslant 0\colon |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (31.10)$$

▷ 1. Пусть

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Для него в силу (31.7) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

Поэтому для всех точек $x \in X$, всех номеров $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие (31.10).

2. Пусть выполняется условие (31.10); тогда в каждой точке $x \in X$ последовательность $\{f_n(X)\}$ удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и, следовательно, сходится. Обозначим предел последовательности $\{f_n\}$ на множестве X через f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in X. \quad (31.11)$$

Перейдя к пределу в последнем неравенстве (31.10) при $p \to \infty$, в силу (31.11) получим, что для всех номеров $n > n_0$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Это и означает равномерную сходимость последовательности функций $\{f_n\}$ к функции f на множестве X. ◁

Определение 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X, \quad (31.12)$$

называется *равномерно сходящимся на множестве* x, если на x равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Очевидно, что ряд, равномерно сходящийся на множестве X, сходится на этом множестве. Пусть

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

и $r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum\limits_{k=n+1} u_k(x)$ — остаток ряда. Равномерная

сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ согласно определению означает, что

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x). \tag{31.13}$$

Это условие равносильно условию

$$s(x) - s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Поэтому условие (31.13) равномерной сходимости на множестве X ряда равносильно условию

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \tag{31.14}$$

Иначе говоря, равномерная сходимость ряда на множестве X означает равномерную сходимость на X к нулю последовательности его остатков. Отсюда в силу леммы получаем, что для того чтобы ряд (31.12) равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |r_n(x)| = 0. \tag{31.15}$$

Замечание 2. Если какие-то ряды равномерно сходятся на некотором множестве, то и любая их конечная линейная комбинация равномерно сходится на этом множестве (см. замечание 1).

Теорема 2 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* (31.12) *равномерно сходится на множестве X, то последовательность его членов равномерно стремится к нулю на этом множестве.*

$\triangleright$ В самом деле,

$$u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{31.16}$$

В случае равномерной сходимости на множестве X ряда (31.12) последовательности $\{s_n(x)\}$ и $\{s_{n-1}(x)\}$ его частичных сумм равномерно стремятся на X к его сумме $s(x)$:

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x), \qquad s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x),$$

поэтому

$$s_n(x) - s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0,$$

а это в силу (31.16) и означает, что

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \quad \triangleleft \tag{31.17}$$

Отметим, что согласно лемме 1 для того, чтобы было выполнено условие (31.17), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |u_n(x)| = 0. \tag{31.18}$$

Теорема 3 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* (31.12) *равномерно сходился на множестве* X, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_0, *что для всех* $n > n_0$, *всех* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *и всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

$\triangleright$ В силу равенства

$$u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x),$$

где $s_n(x)$ — частичные суммы рассматриваемого ряда, критерий Коши равномерной сходимости рядов сразу следует из критерия Коши равномерной сходимости последовательностей. $\triangleleft$

Замечание 3. В дальнейшем нам понадобится следующее простое свойство равномерно сходящихся рядов.

Если ряд (31.12) *равномерно сходится на множестве* X, *а функция* f *ограничена на этом множестве, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ *также равномерно сходится на* X.

$\triangleright$ Действительно, ограниченность функции f означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$. Поэтому для любых целых $n \geqslant 1$, $p \geqslant 0$ и любой точки $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f(x)u_n(x) + f(x)u_{n+1}(x) + \ldots + f(x)u_{n+p}(x)| =$$
$$= |f(x)||u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant c|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)|.$$

Из этого неравенства следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда, ибо этому критерию удовлетворяет исходный ряд (31.12). $\triangleleft$

Теорема 4 (признак Вейерштрасса). *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \alpha_n \geqslant 0, \tag{31.19}$$

сходится и для всех $x \in X$ *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$|u_n(x)| \leqslant \alpha_n, \tag{31.20}$$

то ряд (31.12) *абсолютно и равномерно сходится на множестве* X.

$\triangleright$ Абсолютная сходимость ряда (31.12) в каждой точке x множества X следует, согласно признаку сравнения (теорема 6 в п. 30.4), из неравенства (31.20) и сходимости ряда (31.19).

Докажем равномерную сходимость ряда (31.12). Пусть $r_n(x)$ и ε_n являются остатками порядка n соответственно рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in X$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, т. е. $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$. Тогда

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \underset{(31.20)}{\leqslant} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = \varepsilon_n, \quad x \in X.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, а тогда в силу следствия из леммы 1 имеем

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Это и означает, что ряд (31.12) равномерно сходится на множестве X. $\lhd$

Примеры. 4. В п. 31.1 было показано, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{31.21}$$

сходится при любом $z \in C$, в частности, для любого $r > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}.$$

Поскольку из неравенства $|z| \leqslant r$ следует неравенство $\left|\dfrac{z^n}{n!}\right| \leqslant \dfrac{r^n}{n!}$, то из признака Вейерштрасса следует, что ряд (31.21) абсолютно и равномерно сходится в круге $K_r = \{z\colon\ |z| \leqslant r\}$ любого радиуса r. Однако ряд (31.21) не сходится равномерно на всей комплексной плоскости C. Это следует из того, что последовательность членов ряда (31.21) не стремится равномерно к нулю на C, ибо при любом $n = 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\sup_{C} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = +\infty,$$

и потому условие (31.18) заведомо не выполнено.

Итак, ряд (31.21) равномерно сходится в круге K_r сколь угодно большого радиуса r, но не сходится равномерно на всей плоскости C. Это означает, что если обозначить через $s(z)$ и $s_n(z)$ соответственно сумму и частичные суммы ряда (31.21), то для любого $\varepsilon > 0$ при заданном круге K_r можно так выбрать номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $z \in K_r$ будет выполняться неравенство $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$. Номер n_0 зависит не только от ε, но и от r, т. е. $n_0 = n_0(\varepsilon, r)$, причем при неограниченном возрастании радиуса r номер n_0 также неограниченно возрастает: $\lim\limits_{r\to\infty} n_0(\varepsilon, r) = +\infty$ (если бы это было не так, то ряд (31.21)

сходился бы равномерно на всей комплексной плоскости), т. е. невозможно выбрать такой номер n_0, чтобы при всех $n > n_0$ неравенство $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$ выполнялось для всех $z \in C$.

5. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in C$, сходится в открытом круге $K = \{z\colon\ |z| < 1\}$ и при любом r, $0 \leqslant r < 1$, сходится равномерно в замкнутом круге $K_r = \{z\colon\ |z| \leqslant r\}$. Это следует, например, из признака сходимости Вейерштрасса, так как при $|z| \leqslant r$ имеем $|z^n| = |z|^n \leqslant r^n$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ сходится. В круге K заданный ряд не сходится равномерно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|z|<1} |z^n| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|z|<1} |z|^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ и, следовательно, в круге K не выполняется необходимое условие равномерной сходимости ряда (см. теорему 2).

При $|z| < 1$ члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ образуют убывающую геометрическую прогрессию, и поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \frac{1}{1 - r\cos\varphi - ir\sin\varphi} = \\ = \frac{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2},$$

$$0 \leqslant r < 1, \quad -\infty < \varphi < +\infty.$$

Приравняв действительную и мнимую части этого равенства, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

При фиксированном r, $0 \leqslant r < 1$, эти ряды как функции переменной φ абсолютно и равномерно сходятся на множестве R всех действительных чисел. Это следует, например, из признака равномерной сходимости Вейерштрасса, так как $|r^n \cos n\varphi| \leqslant r^n$, $|r^n \sin n\varphi| \leqslant r^n$, и при $0 \leqslant r < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ сходится.

31.3*. Специальные признаки равномерной сходимости рядов. Для рядов функций справедливы признаки равномерной сходимости, аналогичные признакам Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов.

Теорема 5 (признак Дирихле–Харди*)). *Если последовательность функций $a_n(x) \in R$, $n = 1, 2, ...$, равномерно стремится на множестве X к нулю, т. е.*

$$a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{31.22}$$

и в каждой точке $x \in X$ монотонна, а последовательность функций $b_n(x) \in C$, $n = 1, 2, ...$, $x \in X$, такова, что последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \tag{31.23}$$

ограничена на X, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{31.24}$$

равномерно сходится на множестве X.

▷ Согласно условию последовательность частичных сумм

$$B_n(x) = b_1(x) + ... + b_n(x), \quad n = 1, 2, ...,$$

ряда (31.23) ограничена на множестве X, поэтому существует такая постоянная $B > 0$, что для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$|B_n(x)| \leqslant B.$$

Отсюда для всех $x \in X$, всех $n = 2, 3, ...$ и всех $p = 0, 1, 2, ...$ имеем

$$\Bigl|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\Bigr| = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B. \tag{31.25}$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Из условия (31.22) следует, что существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}. \tag{31.26}$$

Поэтому для любого $x \in X$, любого $n > n_0$ и любого $p = 0, 1, 2, ...$, согласно неравенству Абеля (30.75), будем иметь

$$\Bigl|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\Bigr| \underset{\substack{(30.75)\\(31.25)}}{\leqslant} 2B(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \underset{(31.26)}{\leqslant} 2B\Bigl(\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B}\Bigr) = \varepsilon.$$

Таким образом, ряд (31.24) удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда. ◁

Теорема 6 (признак Абеля–Харди). *Если последовательность функций $a_n(x) \in R$, $n = 1, 2, ...$, ограничена на множестве X и монотонна в каждой точке $x \in X$, а ряд* (31.23) *равномерно сходится*

*) Г. Харди (1877–1947) — английский математик.

на X, *то и ряд* (31.24) *также равномерно сходится на множестве* X.

$\triangleright$ В силу ограниченности на множестве X последовательности $\{a_n(x)\}$ существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|a_n(x)| \leqslant A. \tag{31.27}$$

В силу же равномерной сходимости ряда (31.23) для произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{3A}.$$

В результате, согласно неравенству Абеля (30.75), для всех $x \in X$, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2\dots$ будет выполняться неравенство

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\Big| \underset{\substack{(30.75)\\(31.28)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3A}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \underset{(31.27)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3A}(A + 2A) = \varepsilon,$$

т. е. снова ряд (31.24) удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда. $\triangleleft$

Пример. В п. 30.8* было показано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \tag{31.29}$$

сходится на всей числовой оси R. Там же было показано, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\Big| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad x \neq 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{31.30}$$

Поэтому если положить $a_n = 1/n$, $b_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$, то последовательность $\{a_n\}$ будет монотонной и, как всякая сходящаяся числовая последовательность, может рассматриваться как равномерно сходящаяся, например, на R. Последовательность $\{b_n(x)\}$ ограниченна на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $x = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, так как для любой точки x такого отрезка

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\Big| \underset{(31.30)}{\leqslant} \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,b]} \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} < +\infty,$$

и, следовательно, последовательность $\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\Big|$, $n = 1, 2, \dots$, ограниченна сверху на отрезке $[a, b]$ числом $\max\limits_{[a,b]} \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$. Таким образом,

на всяком отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $x = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, ряд (31.29) удовлетворяет условиям признака Дирихле–Харди и потому равномерно сходится.

Можно показать, что если отрезок $[a, b]$ содержит точку вида $x = 2\pi m$ при некотором $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, то ряд (31.29) не сходится равномерно на этом отрезке.

31.4. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. До сих пор при изучении последовательностей и рядов функций эти функции предполагались заданными на произвольном множестве X. Теперь мы перейдем к изучению свойств непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, в связи с чем множество X будет являться подмножеством числовой прямой.

При изучении вопроса о непрерывности суммы ряда будем рассматривать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $x \in X \subset R$, $u_n(x) \in C$, $n = 1, 2, ...$

Теорема 7. *Если ряд равномерно сходится на некотором множестве и в какой-то точке этого множества все члены ряда непрерывны, то сумма ряда непрерывна в этой точке.*

▷ Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X, \tag{31.31}$$

равномерно сходится на множестве X, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — его сумма, а

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, ..., \tag{31.32}$$

— его частичные суммы.

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Равномерная сходимость ряда (31.31) означает, что последовательность $\{s_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $s(x)$. Поэтому существует такой номер n, что для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{31.33}$$

так как такое неравенство имеет место для всех номеров, начиная с некоторого. Зафиксируем указанный номер n.

Функция $s_n(x)$, являясь конечной суммой непрерывных (согласно условиям теоремы) в точке $x_0 \in X$ функций $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$, сама непрерывна в этой точке. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $x \in U(x_0; \delta)$, выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{31.34}$$

В силу сказанного для любой точки $x \in X \cap U(x_0;\delta)$ имеем

$$|s(x)-s(x_0)| = |[s(x)-s_n(x)]+[s_n(x)-s_n(x_0)]+[s_n(x_0)-s(x_0)]| \leqslant \leqslant |s(x)-s_n(x)|+|s_n(x)-s_n(x_0)|+|s_n(x_0)-s(x_0)| \underset{(31.33),(31.34)}{<} \underset{(31.33),(31.34)}{<} \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Это и означает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0. ◁

Отметим, что в условиях теоремы в точке $x_0 \in X$ для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ возможен почленный переход к пределу, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

▷ Действительно, в силу непрерывности функций $s(x)$ и $u_n(x)$ в точке x_0 имеем $\lim\limits_{x\to x_0} s(x)=s(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)=u_n(x_0)$, $n=1,2,\dots$, поэтому

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} s(x) = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x). \quad ◁$$

Заметим, что в теореме 7 условие равномерной сходимости ряда на множестве нельзя заменить условием только его сходимости на этом множестве. Это показывает пример 2 в п. 31.1: ряд (31.4) сходится на всей числовой прямой, его члены являются непрерывными на ней функциями, а сумма ряда — разрывная в точке $x=0$ функция.

Выше отмечалось, что изучение рядов равносильно изучению последовательностей (п. 30.1), поэтому каждое предложение о рядах можно перефразировать в соответствующее предложение о последовательностях.

Будем рассматривать последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in X \subset R$, $f_n(x) \in C$, $n=1,2,\dots$ Теорема 7 в терминах последовательностей равносильна следующей теореме.

Теорема 7$'$. *Если последовательность функций равномерно сходится на некотором множестве и в некоторой точке множества все члены последовательности непрерывны, то и предельная функция последовательности непрерывна в этой точке.*

Заметим, что если

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$$

и все функции непрерывны в точке $x_0 \in X$, то

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

т. е. при сделанных предложениях предельные переходы при $n\to\infty$ и при $x\to x_0$ перестановочны.

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Пример 3 в п. 31.2 еще раз подтверждает, что условие равномерной сходимости в теоремах 7 и 7′ существенно.

Теорема 8. *Пусть функции* $u_n(x) \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in [a, b]$, *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{31.35}$$

равномерно сходится на этом отрезке. Тогда, какова бы ни была точка $x_0 \in [a, b]$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt \tag{31.36}$$

также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ *и*

$$\int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt. \tag{31.37}$$

Равенство (31.37) означает, что в условиях теоремы ряд (31.35) можно почленно интегрировать.

▷ В силу равномерной сходимости ряда (31.35) и непрерывности его членов на отрезке $[a, b]$ его сумма

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{31.38}$$

также непрерывна на этом отрезке (теорема 7), а следовательно, и интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а поэтому и на любом отрезке с концами в точках $x_0 \in [a, b]$ и $x \in [a, b]$.

Покажем, что ряд (31.36) равномерно сходится к функции

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x} s(t)\,dt. \tag{31.39}$$

Как всегда, положим

$$s_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad r_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} s(x) - s_n(x), \tag{31.40}$$

а через $\sigma_n(x)$ обозначим частичные суммы ряда (31.36):

$$\sigma_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\Big)dt = \int_{x_0}^{x} s_n(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{31.41}$$

Для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| \underset{\substack{(31.39)\\(31.41)}}{=} \left|\int_{x_0}^{x} s(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} s_n(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |s(t) - s_n(t)|\,dt\right| \underset{(31.40)}{=}$$

$$\underset{(31.40)}{=} \left|\int_{x_0}^{x} |r_n(t)|\,dt\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \left|\int_{x_0}^{x} dt\right| =$$

$$= |x - x_0| \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |r_n(t)|. \quad (31.42)$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{[a,b]} |\sigma(x) - \sigma_n(x)| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |r_n(x)|.$$

Из равномерной сходимости на отрезке $[a, b]$ ряда (31.35) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[a,b]} |r_n(x)| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[a,b]} |\sigma(x) - \sigma_n(x)| = 0,$$

что, согласно лемме 1, означает, что последовательность $\{\sigma_n(x)\}$ равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к функции $\sigma(x)$, т. е. что ряд (31.36) равномерно сходится на указанном отрезке и что его сумма равна

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt.$$

Последнее равенство в силу (31.39) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt,$$

что согласно (31.38) равносильно равенству (31.37). $\triangleleft$ smallskip

Перефразировка теоремы 8 в терминах последовательностей имеет следующий вид.

Теорема 8$'$. *Если последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f_n(x) \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на этом отрезке к функции $f(x)$, то, какова бы ни была точка $x_0 \in [a, b]$, последовательность $\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.*

Из этой теоремы следует, в частности, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt,$$

т. е. что в данном случае можно переходить к пределу под знаком интеграла, или, коротко: в рассматриваемом случае предел интегралов равен интегралу от предела.

Рис. 126

Замечание. Условия равномерной сходимости в теореме $8'$ являются существенными. Подтвердим это примером.

Функции $f_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, зададим для наглядности графически (рис. 126). Для любой точки $x \in [0,1]$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ и, следовательно, $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$. При любом же $n = 1, 2, \ldots$ интеграл $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ равен площади треугольника $\triangle AOB$. Поэтому в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Теорема 9. *Пусть функции* $u_n(x) \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и ряд, составленный из их производных:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{31.43}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. *Тогда если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{31.44}$$

сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, *то он сходится равномерно на всем отрезке* $[a, b]$, *его сумма*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{31.45}$$

является непрерывно дифференцируемой функцией и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{31.46}$$

В силу формулы (31.45) последнее равенство можно записать в виде

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Таким образом, в условиях теоремы ряд (31.44) можно почленно дифференцировать.

▷ Положим

$$\sigma(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{31.47}$$

По теореме 8 этот ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)] \tag{31.48}$$

(мы использовали формулу Ньютона–Лейбница), причем ряд, стоящий в правой части равенства, в силу той же теоремы 8 равномерно сходится на отрезке $[a, b]$.

По условию теоремы числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, причем, как и для всякого числового ряда, у него сходимость совпадает с равномерной сходимостью. Сумма двух равномерно сходящихся на отрезке $[a, b]$ рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(x_0)]$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, также, очевидно, равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. В силу доказанной сходимости ряда (31.44) формулу (31.48) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или (см. (31.45))

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = s(x) - s(x_0). \tag{31.49}$$

Функция $\sigma(t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ (см. (31.47)), и поэтому она сама непрерывна на этом отрезке, а тогда функция $\int\limits_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ (см. п. 25.1) и

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sigma(x). \tag{31.50}$$

В силу формулы (31.49) это означает, что функция $s(x)$ непрерывно дифференцируема и что

$$s'(x) \underset{(31.49)}{=} \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt \underset{(31.50)}{=} \sigma(x) \underset{(31.47)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \quad \triangleleft$$

Для последовательностей функций аналогичная теорема выглядит следующим образом.

Теорема 9$'$. *Если последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f_n(x) \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, а последовательность их производных $f_n'(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции $\varphi(x)$, то и последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к непрерывно дифференцируемой функции f и $f' = \varphi$.*

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 9, следует, что если функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывно дифференцируемы и последовательность их производных $\{f_n'\}$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, то условия:

1) существует такая точка $x_0 \in [a, b]$, что числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится;

2) $f_n \underset{[a,b]}{\to} f$;

3) $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$;

равносильны (то, что из условия 1) следуют условия 2) и 3), было доказано; что из 3) следует 1) — очевидно). Поэтому теорема 9 равносильна следующему утверждению.

Если
$$f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \quad \text{и} \quad f_n' \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi,$$
то существует производная f' и $f' = \varphi$, т. е. в этом случае предел производных равен производной от предела.

В терминах рядов это утверждение (равносильное теореме 9) можно сформулировать следующим образом: если функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы, а ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = s(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sigma(x)$ равномерно сходятся на отрезке $[a, b]$, то у суммы ряда $s(x)$ существует производная $s'(x)$ и $s'(x) = \sigma(x)$.

Эти формулировки отражают сущность условий, при выполнении которых возможно почленное дифференцирование последовательностей и рядов. Но, конечно, на практике очень удобно, что сходимость последовательностей и рядов достаточно проверять лишь в одной точке и не доказывать их равномерную сходимость (конечно, равномерную сходимость последовательностей и рядов производных необходимо установить).

Пример. Рассмотрим функцию
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 1,$$

называемую *функцией Римана* (ряд, стоящий в правой части равенства, сходится при $x > 1$; см. (30.20)).

Каково бы ни было $\alpha > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ и ряд, получающийся его формальным дифференцированием, т. е. ряд $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$, равномерно сходятся на полуинтервале $[\alpha, +\infty)$. Это сразу вытекает в силу признака Вейерштрасса из неравенств

$$\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^\alpha}, \quad 0 < \frac{\ln n}{n^x} < \frac{\ln n}{n^\alpha} < \frac{1}{n^{\alpha - \varepsilon}}, \quad x > \alpha, \quad 0 < \varepsilon < \alpha - 1,$$

справедливых при фиксированном ε для достаточно больших n, и из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$, $0 < \varepsilon < \alpha - 1$.

В силу теоремы 9 при любом $x > \alpha$ имеет место равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x},$$

а поскольку $\alpha > 1$ было выбрано произвольно, то это равенство верно и при любом $x > 1$.

§ 32. Степенные ряды

32.1. Радиус сходимости и круг сходимости. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in C, \quad z_0 \in C, \tag{32.1}$$

числа $a_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$, называются *коэффициентами ряда* (32.1). С помощью замены переменного $\zeta = z - z_0$ ряд (32.1) может быть преобразован к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{32.2}$$

Поэтому, как правило, мы ограничиваемся рассмотрением рядов вида (32.2).

Теорема 1 (первая теорема Абеля). *Если степенной ряд* (32.2) *сходится при* $z = z_0$, *то при любом* z *таком, что* $|z| < |z_0|$, *ряд* (32.2) *сходится абсолютно.*

Следствие. *Если ряд* (32.2) *расходится в точке* z_0, *то в любой точке* z *такой, что* $|z| > |z_0|$, *он также расходится.*

▷ Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{32.3}$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$, и потому существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|a_n z_0^n| \leqslant c. \tag{32.4}$$

Следовательно, при $z_0 \neq 0$ (в случае $z_0 = 0$ утверждение теоремы очевидно и бессодержательно, так как множество таких z, что $|z| < 0$, пусто) имеем

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \underset{(32.4)}{\leqslant} c \left|\frac{z}{z_0}\right|^n, \tag{32.5}$$

и если $|z|<|z_0|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ сходится, ибо является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(\text{ее знаменатель } \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{|z|}{|z_0|} < 1\right)$. Поэтому по признаку сравнения сходимости рядов из неравенства (32.5) следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, т. е. ряд (32.2) абсолютно сходится (рис. 127). ◁

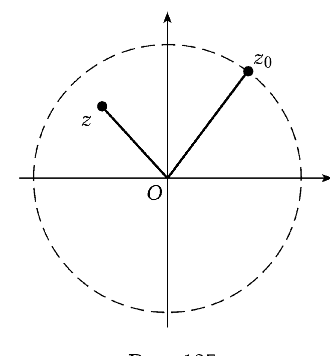


Рис. 127

Следствие сразу вытекает из теоремы: если в точке z_0 ряд (32.2) расходится, то при $|z| > |z_0|$ он не может сходиться в точке z, так как тогда бы он по доказанной теореме сходился (и даже абсолютно) в точке z_0.

Рассмотрим степенной ряд (32.2). Он заведомо сходится в точке $z = 0$. Обозначим через X множество всех таких действительных неотрицательных чисел $x \in R$, что при $z = x$ ряд (32.2) сходится. Поскольку $0 \in X$, то $X \neq \varnothing$. Пусть

$$R = \sup X. \tag{32.6}$$

Очевидно, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.

Неравенство $|z| \leqslant R$ задает на комплексной плоскости C замкнутый круг радиуса R с центром в точке $z = 0$. При $R = 0$ этот круг вырождается в точку $z = 0$, а при $R = +\infty$ превращается во всю комплексную плоскость.

Определение 1. Число $R = \sup X$ (конечное или бесконечное) называется *радиусом сходимости ряда* (32.2), а круг $\{z\colon\ |z| \leqslant R\}$ — его *кругом сходимости.*

Теорема 2. *Пусть R — радиус сходимости ряда* (32.2). *Тогда если $|z| < R$, то ряд* (32.2) *сходится абсолютно, если $|z| > R$, то ряд* (32.2) *расходится, а если $0 \leqslant r < R$, то в круге $\{z: \ |z| \leqslant r\}$ ряд* (32.2) *сходится равномерно.*

$\triangleright$ Если $R = 0$, то точек $z \in C$ таких, что $|z| < R$ нет. Если же $0 < R \leqslant +\infty$ и $z \in C$ таково, что $|z| < R$, то согласно определению верхней грани из равенства $R = \sup X$ следует, что существует такое $x \in X$, что $|z| < x < R$, а так как по определению множества X во всех его точках x ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, то по первой теореме Абеля он абсолютно сходится в точке z.

Если $R = +\infty$, то точек $z \in C$ таких, что $|z| > R$, нет.

Если же $R < +\infty$ и $z \in C$ таково, что $|z| > R$, то для любой точки x такой, что $R < x < |z|$, согласно определению $R = \sup X$ имеем $x \notin X$, а поэтому в силу определения множества X ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится. Следовательно, в силу следствия из теоремы 1 ряд (32.2) расходится в рассматриваемой точке z.

Если теперь

$$0 \leqslant r < R, \tag{32.7}$$

то покажем, что ряд (32.2) сходится равномерно в круге $|z| \leqslant r$ (рис. 128). Действительно, если $|z| \leqslant r$, то

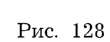


Рис. 128

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n r^n|. \tag{32.8}$$

Из неравенства (32.7), согласно вышедоказанному свойству радиуса сходимости, вытекает, что ряд (32.2) при $z = r$ абсолютно сходится, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$, а тогда в силу признака равномерной сходимости Вейерштрасса (п. 31.2) из неравенства (32.8) следует, что ряд (32.2) равномерно сходится в круге $\{z: \ |z| \leqslant r\}$. $\triangleleft$

Рассмотрим степенной ряд общего вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Он сходится или расходится в точке z тогда и только тогда, когда соответственно сходится или расходится в точке $\zeta = z - z_0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$. Радиус сходимости R последнего ряда называется и радиусом сходимости

исходного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

При замене переменного $\zeta = z - z_0$ кругу сходимости $\{\zeta\colon\ |\zeta| \leqslant R\}$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ соответствует круг $\{z\colon\ |z-z_0| \leqslant R\}$. Он называется *кругом сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Из теоремы 2 следует, что если R является радиусом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, то при $|z-z_0| < R$ этот ряд абсолютно сходится, при $|z-z_0| > R$ он расходится, а если $0 \leqslant r < R$, то в круге $\{z\colon\ |z-z_0| \leqslant r\}$ ряд равномерно сходится.

Отметим, что из равномерной сходимости ряда (32.1) в любом круге $|z-z_0| \leqslant R$, где $0 \leqslant r < R$, и непрерывности каждого члена этого ряда следует, что сумма каждого степенного ряда непрерывна внутри его круга сходимости $R > 0$.

Действительно, для любого z, $|z| < R$, можно выбрать такое r, что $|z| < r < R$. В круге $|z| \leqslant r$ рассматриваемый ряд сходится равномерно, а так как его члены — непрерывные функции, то его сумма также непрерывна на этом круге, в частности в точке z (см. теорему 7 в п. 31.4).

Примеры. 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n. \tag{32.9}$$

Для исследования его абсолютной сходимости применим признак Даламбера (п. 30.4):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!\, z^{n+1}|}{|n! z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad z \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad z = 0. \end{cases}$$

Следовательно, ряд (32.9) сходится только при $z = 0$, а потому его радиус сходимости равен нулю: $R = 0$.

2. Радиус сходимости R ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{32.10}$$

равен $+\infty$, так как в п. 31.1 было показано, что этот ряд сходится при любом $z \in C$.

3. Радиус сходимости суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \tag{32.11}$$

равен 1, так как ряд (32.11) сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$ (п. 30.1, 30.2). На границе $\{z\colon\ |z| = 1\}$ круга сходимости имеем $|z| = 1$ и, следовательно, последовательность членов ряда (32.11) не стремится к нулю, откуда явствует, что во всех точках границы своего круга сходимости ряд (32.11) расходится.

4. У ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{32.12}$$

радиус сходимости также равен 1. Действительно, при $|z| < 1$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \tag{32.13}$$

и, следовательно, согласно признаку равномерной сходимости Вейерштрасса, ряд (32.12) равномерно, а следовательно, и просто сходится. При $|z| > 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z^n|}{n^2} = +\infty$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 1 из п. 30.1), и, таким образом, ряд (32.12) при $|z| > 1$ расходится.

Отметим, что во всех точках границы круга сходимости, т. е. при $|z| = 1$, в силу того же неравенства (32.13) ряд (32.12) сходится.

5. Радиус сходимости R ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \tag{32.14}$$

можно найти, применив признак Даламбера: имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{z^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{z^n}{n}\right|} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|.$$

Поэтому ряд (32.14) сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$. Таким образом, $R = 1$.

В точке $z = 1$ границы круга сходимости ряд (32.14) превращается в гармонический ряд и, следовательно, расходится, а при $z = -1$ получается сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$. Итак, у ряда (32.14) на границе круга сходимости имеются как точки, в которых он сходится, так и точки, в которых он расходится.

Разобранные примеры показывают, что существуют степенные ряды, у которых радиус сходимости равен нулю (ряд (32.9)), равен конечному положительному числу (ряд (32.11)) и равен бесконечности (ряд (32.10)). На границе круга сходимости ряд может во всех точках сходиться (ряд (32.12)), а может и сходиться в одних точках

и расходиться в других (ряд (32.14)) или расходиться во всех точках (ряд (32.11)).

Функции, раскладывающиеся в степенные ряды, называются *аналитическими.* Точнее, имеет место следующее

Определение 2. Функция f называется *аналитической в точке* z_0, если в некоторой окрестности (см. п. 5.11) этой точки функция f раскладывается в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Поскольку в силу определения окрестности точки все точки, достаточно близкие к данной точке, принадлежат ее окрестности, то радиус сходимости написанного ряда положителен.

Теорема 3* (вторая теорема Абеля). *Если R — радиус сходимости степенного ряда* (32.2), $R < +\infty$, *и этот ряд сходится при* $z = R$, *то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$ *действительной оси.*

Следствие. *Если ряд* (32.2) *сходится при* $z = R$, *то его сумма непрерывна на отрезке* $[0, R]$ *действительной оси.*

$\triangleright$ Доказательство теоремы. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n, \tag{32.15}$$

причем, по условию теоремы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Поскольку этот ряд числовой, то его сходимость можно рассматривать как равномерную сходимость на отрезке $[0, R]$. Последовательность

$$(x/R)^n, \quad n = 1, 2, ...,$$

ограничена на отрезке $[0, R]$, ибо если $0 \leqslant x \leqslant R$, то

$$0 \leqslant (x/R)^n \leqslant 1,$$

и монотонна при любом $x \in [0, R]$. Следовательно, в силу признака равномерной сходимости Абеля (п. 31.3*) ряд (32.2) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. $\triangleleft$

Утверждение следствия вытекает из непрерывности каждого члена ряда (32.2) на отрезке $[0, R]$ и доказанной равномерной сходимости этого ряда на указанном отрезке.

Докажем еще одну лемму для степенных рядов в комплексной области, которая будет использована в следующем параграфе.

Лемма 1. *Радиусы сходимости R, R_1 и R_2 соответственно рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{32.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \tag{32.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{32.18}$$

равны:

$$R = R_1 = R_2. \tag{32.19}$$

Таким образом, ряды (32.17) и (32.18), получающиеся из (32.16) соответственно с помощью "формального интегрирования и дифференцирования", имеют те же радиусы сходимости, что и исходный ряд. Интегрирование и дифференцирование названо здесь формальным, поскольку для функций комплексного аргумента эти операции у нас не были определены и они были произведены так, как если бы a_n и z были действительными числами.

▷ Из неравенства

$$\left|\frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} |z||a_n z^n| \leqslant |z||a_n z^n|$$

следует, что если в точке z абсолютно сходится ряд (32.16), то в этой точке абсолютно сходится и ряд (32.17), а это означает, что радиус сходимости R_1 ряда (32.17) не меньше радиуса сходимости R ряда (32.16): $R_1 \geqslant R$. Из неравенства же

$$|a_n z^n| \leqslant n|a_n z^n| = |n a_n z^{n-1}||z|$$

следует, что если в точке z абсолютно сходится ряд (32.18), то в этой точке абсолютно сходится и ряд (32.16), т. е. $R \geqslant R_2$.

Таким образом,

$$R_1 \geqslant R \geqslant R_2. \tag{32.20}$$

Покажем теперь, что

$$R_2 \geqslant R_1. \tag{32.21}$$

Возьмем какую-либо точку $z \neq 0$ внутри круга сходимости ряда (32.17) и докажем, что в ней сходится ряд (32.18). Поскольку $|z| < R_1$, то существует такое действительное число r, что

$$|z| < r < R_1. \tag{32.22}$$

Запишем абсолютную величину члена ряда (32.18) следующим образом:

$$|n a_n z^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z|^2} \left|\frac{z}{r}\right|^{n+1} \left|\frac{a_n}{n+1} r^{n+1}\right|. \tag{32.23}$$

Положим $q = \left|\frac{z}{r}\right|$. В силу условия (32.22) $0 < q < 1$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{|z|^2}\left|\frac{z}{r}\right|^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{|z|^2}\, q^{n+1}$$

сходится (в этом легко убедиться, например, с помощью признака Даламбера). Поэтому последовательность его членов стремится к нулю и, следовательно, ограничена, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{n(n+1)}{|z|^n}\, q^{n+1}\right| \leqslant c. \tag{32.24}$$

Из (32.23) и (32.24) следует неравенство

$$|na_n z^{n-1}| \leqslant c\left|\frac{a_n}{n+1}\, r^{n+1}\right|.$$

Поскольку $r \underset{(32.22)}{\leqslant} R_1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, r^{n+1}$ абсолютно сходится, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n+1}\, r^{n+1}\right|$, а поэтому по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$. Итак, из условия $|z| < R_1$, следует абсолютная сходимость ряда (32.18). Это и означает выполнение неравенства (32.21).

Из неравенств (32.20) и (32.21) следует, что имеет место равенство (32.19). $\triangleleft$

32.2. Аналитические функции в действительной области. Рассмотрим теперь аналитические функции, раскладывающиеся в степенной ряд с действительными коэффициентами в некоторой окрестности точки действительной оси R. Такие функции называются *действительными аналитическими функциями*. Это означает, что действительная аналитическая в точке $x_0 \in R$ функция f в некоторой окрестности этой точки на действительной оси представима в виде степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{32.25}$$

с действительными коэффициентами a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Очевидно, что действительные аналитические функции являются частным случаем аналитических функций, и поэтому при изучении их можно использовать свойства степенных рядов в комплексной области. Рассмотрим некоторые свойства действительных аналитических функций. Прежде всего заметим, что для всякого степенного

ряда (32.25) с действительными коэффициентами (как и для всякого степенного ряда) существует радиус сходимости R (теорема 2 из п. 32.1). В действительной области радиус сходимости R ряда (32.25) обладает тем свойством, что для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ рассматриваемый ряд абсолютно сходится, а при $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$ расходится. При $R > 0$ интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (32.25).

Теорема 4. *Если функция f раскладывается в окрестности x_0 в степенной ряд* (32.25) *с радиусом сходимости R* (*и, следовательно, радиус сходимости R этого ряда положителен*: $R > 0$), *то*:

1) *функция f имеет на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, которые могут быть найдены из ряда* (32.25) *почленным дифференцированием*:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots; \tag{32.26}$$

2) *для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}; \tag{32.27}$$

таким образом, ряд (32.25) *можно почленно интегрировать на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$*;

3) *ряды* (32.25), (32.26) *и* (32.27) *имеют одинаковые радиусы сходимости.*

Короче, внутри интервала сходимости степенного ряда ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

$\triangleright$ В силу леммы п. 32.1 ряды (32.26) и (32.27), получающиеся из ряда (32.25) почленным дифференцированием и интегрированием, имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (32.25). Так как всякий степенной ряд вида (32.25) с радиусом сходимости $R > 0$ на любом отрезке $[x_0 - r,\, x_0 + r]$, $0 < r < R$, сходится равномерно (теорема 2 из п. 32.1), то утверждения 1) и 2) доказываемой теоремы непосредственно следуют из общих теорем о дифференцируемости и интегрируемости функциональных рядов (теоремы 8 и 9 из п. 31.4). $\triangleleft$

Теорема 5. *Если функция f раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{32.28}$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{32.29}$$

и, следовательно, справедлива формула

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n. \tag{32.30}$$

Следствие. *Если в некоторой окрестности заданной точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.*

▷ Из формулы (32.26) при $x = x_0$ имеем $f^{(m)}(x_0) = m!\,a_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда и следует равенство (32.29).

Единственность разложения (32.28) следует из того, что его коэффициенты задаются формулами (32.29). ◁

32.3. Разложение функций в степенные ряды. Различные способы записи остаточного члена формулы Тейлора.

Определение 3. Пусть действительная функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \tag{32.31}$$

называется ее *рядом Тейлора* в точке x_0.

Согласно теоремам 4 и 5 всякая действительная аналитическая в некоторой точке действительной оси функция (32.25) бесконечно дифференцируема в этой точке и раскладывается в ее окрестности в свой ряд Тейлора. Если же функция бесконечно дифференцируема в какой-то точке, то может случиться, что она не равна сумме своего ряда Тейлора ни в какой окрестности этой точки (в этом случае функция в силу сказанного выше заведомо не аналитическая в рассматриваемой точке).

Приведем пример такой функции.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{32.32}$$

Если $x \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\,e^{-1/x^2}, \qquad f''(x) = -\frac{6}{x^4}\,e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6}\,e^{-1/x^2},$$

вообще,

$$f^{(n)}(x) = P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2}, \tag{32.33}$$

где $P_n(t)$ — некоторый многочлен от переменной t (n — его порядковый номер, а не степень), т. е. $f^{(n)}(x)$ имеет вид

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\lambda_k}{x^k}, \quad \lambda_k \in R, \quad m_n \in N.$$

Найдем предел
$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x).$$
(Заметим, что поскольку здесь производные $f^{(n)}(x)$, $n=1,2,\ldots$, определены пока только при $x\neq 0$, то здесь и ниже предел берется по $x\neq 0$.) Сделав замену переменной $t=1/x^2$, получим
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}\,e^{-1/x^2}\right| = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{m/2}}{e^t}=0,\quad m\in N.$$
Отсюда в силу (32.33) имеем
$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)=\lim_{x\to 0}P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x^2}=0. \tag{32.34}$$
Теперь, заметив, что $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}=0=f(0)$, т. е. что функция f непрерывна в точке $x=0$, получим отсюда (см. следствие 2 теоремы 3 из п. 12.2), что она и дифференцируема в этой точке и что (в силу (32.34) при $n=1$) $f'(0)=0$. Следовательно, согласно (32.34) производная f' также непрерывна при $x=0$. Повторив аналогичное рассуждение для производной f' вместо функции f, получим, что в точке $x=0$ существует вторая производная f'', что $f''(0)=0$ и что f'' непрерывна при $x=0$. Продолжая это процесс, докажем, что при любом $n=1,2,\ldots$ имеет место равенство
$$f^{(n)}(0)=0.$$
Из него следует, что все члены ряда Тейлора функции (32.32) равны нулю, т. е. указанный ряд имеет вид
$$0+0+\ldots+0+\ldots,$$
а поскольку сама функция $f(x)\neq 0$ при $x\neq 0$, то она не равна сумме своего ряда Тейлора ни в какой окрестности точки $x=0$.

Функция (32.32) является примером бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической в данной точке. То, что она бесконечно дифференцируема в точке $x=0$, только что было доказано, а то, что она неаналитическая в данной точке (т. е. не раскладывается в степенной ряд), следует из того, что она ни в какой окрестности нуля не является суммой своего ряда Тейлора в этой точке.

Пусть f — бесконечно дифференцируемая в точке x_0 функция,
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \tag{32.35}$$
— ее ряд Тейлора,
$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \tag{32.36}$$

— частичная сумма порядка $n = 1, 2, \ldots$ ряда (32.35) и

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x) \tag{32.37}$$

— остаточный член формулы Тейлора для функции f (а не сумма остатка ряда (32.35), так как сумма остатка ряда имеет смысл только тогда, когда известно, что ряд сходится; относительно же ряда (32.35) это не предполагалось. Кроме того, если он даже и сходится, то неизвестно, равна его сумма $f(x)$ или нет). Таким образом,

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x) \tag{32.38}$$

— формула Тейлора для функции f.

Отсюда видно, что для того чтобы функция f равнялась сумме своего ряда Тейлора в некоторой точке x, надо, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора (32.38) стремился к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{32.39}$$

В самом деле, если это имеет место, то из формулы (32.38) следует, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x),$$

т. е. $f(x)$ является суммой ряда (32.35).

Для исследования свойства (32.39) остаточного члена $r_n(x)$ установим некоторые новые виды его записи.

Напомним предварительно, что если точка ξ принадлежит интервалу с концами в точках x_0 и x, т. е. либо $x < \xi < x_0$, либо $x_0 < \xi < x$, и если $\theta = \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0}$, то $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Теорема 6. *Если функция f $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, то остаточный член $r_n(x)$ ее формулы Тейлора (32.38) для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ можно записать в каждом из следующих трех видов*:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt, \tag{32.40}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{32.41}$$

где ξ принадлежит интервалу с концами в точках x_0 и x, т. е. $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, и

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \tag{32.42}$$

где $0 < \theta < 1$.

Формула (32.40) называется *остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме*, формула (32.41) — *в форме Лагранжа*, а (32.42) — *в форме Коши*.

Число θ, $0 < \theta < 1$, участвующее в записи остаточного члена $r_n(x)$, зависит от x и от n.

⊳ В силу формулы Ньютона–Лейбница имеем

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t).$$

Применив интегрирование по частям к интегралу в правой части этого равенства, получим

$$f(x) = f(x_0) + (-f'(t)(x-t))\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt. \tag{32.43}$$

Эта формула уже доказана нами для $m = 1$ и $m = 2$.

Проинтегрируем по частям последнее слагаемое в правой части равенства (32.43):

$$\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\,(x-x_0)^m + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

Подставим получившееся выражение в (32.43):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

В результате получилась формула (32.43), в которой m заменено на $m+1$.

Таким образом, формула Тейлора (32.43) доказана методом математической индукции для всех $m \leqslant n$. При $m = n$ ее остаточный член имеет вид (32.40).

Применим теперь интегральную теорему о среднем значении к интегралу (32.40). Заметив, что функция $(x-t)^n$ не меняет знака (n, x_0 и x фиксированы, а t изменяется между x_0 и x), а функция $f^{(n+1)}$ непрерывна на промежутке интегрирования, вынесем за знак интеграла "среднее значение" производной $f^{(n+1)}$ (см. следствие из теоремы п. 24.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\Big(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит на интервале с концами в точках x_0 и x. Формула (32.41) доказана.

Если применить интегральную теорему о среднем к интегралу (32.40), вынося за знак интеграла среднее значение всей подынтегральной функции (см. п. 24.2), то получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \quad (32.44)$$

где ξ, как и выше, лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т. е. $\xi = x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$. Отсюда

$$x-\xi = x-x_0-\theta(x-x_0) = (x-x_0)(1-\theta).$$

Подставив это выражение $x-\xi$ в (32.44), получим формулу (32.42). $\lhd$

Укажем теперь одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Теорема 7. *Если функция в окрестности точки x_0 имеет все производные, ограниченные в совокупности на этой окрестности, то функция раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности точки x_0.*

$\rhd$ Пусть функция f имеет на интервале (x_0-h, x_0+h) производные всех порядков и они ограничены в совокупности на этом интервале, т. е. существует такая постоянная $c>0$, что для всех $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$ и всех $n=0,1,2,\ldots$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant c. \quad (32.45)$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h^n}{n!} = 0. \quad (32.46)$$

Это следует из того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится при любом $z \in C$ (пример 1 из п. 31.1), в частности, он сходится при $z = h$, а равенство (32.46) выражает собой необходимое условие сходимости этого ряда: последовательность членов сходящегося ряда стремится к нулю.

Для того чтобы доказать, что функция f раскладывается в степенной ряд, т. е. в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h, \tag{32.47}$$

достаточно убедиться в том, что (см. (32.39))

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \tag{32.48}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора функции f в точке x_0. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа (см. (32.41)). Из неравенства (32.45) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \underset{(41.45)}{\leqslant} c \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{32.49}$$

где x и ξ таковы, что $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$. Так как согласно (32.46) имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

то в силу неравенства (32.49) при $|x - x_0| < h$ выполняется условие (32.48). $\triangleleft$

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы 7 было показано, что остаток $r_n(x)$ ряда не только стремится к нулю, но и то, что это стремление к нулю в силу оценки (32.49) происходит на интервале $(x_0 - h,\, x_0 + h)$ равномерно. Поэтому если все производные функции f ограничены на интервале $(x_0 - h,\, x_0 + h)$, то ряд Тейлора в точке x_0 сходится на этом интервале к самой функции $f(x)$ равномерно.

32.4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

1. Р а з л о ж е н и е в р я д ф у н к ц и и $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 1, 2, \dots$, то для любого фиксированного $a > 0$, для всех $x \in (-a, a)$ и всех $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$0 < f^{(n)}(x) < e^a.$$

Таким образом, на интервале $(-a, a)$ для функции e^x выполнены условия теоремы 7 ($x_0 = 0$) и, следовательно, функция e^x раскладывается в ряд Тейлора на любом конечном интервале, а потому и на всей числовой оси.

Заметив, что в данном случае $f^{(n)}(0) = 1$, получим (см. (32.47))

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{32.50}$$

Напомним, что в п. 31.1 было установлено, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости (впрочем, это независимо от предыдущего следует согласно первой теореме Абеля и из доказанной здесь сходимости ряда (32.50) на всей действительной числовой оси). В силу формулы (32.50) для действительных $z = x$ его сумма равна e^x. В случае существенно комплексных z его сумму по аналогии обозначают e^z. Таким образом, формула

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{32.51}$$

для существенно комплексных чисел z является определением функции e^z.

Так определенная функция e^z, $z \in C$, не только совпадает для действительных $z = x$ с известной показательной функцией e^x, но и сохраняет в комплексной области ряд свойств показательной функции действительного аргумента. Например,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad z_1 \in C, \quad z_2 \in C. \tag{32.52}$$

Действительно, ряды, полученные из (32.51) при $z = z_1$ и $z = z_2$, абсолютно сходятся, поэтому их можно почленно перемножить; так как получившийся при этом ряд также абсолютно сходится, то его члены можно располагать в произвольном порядке. Соберем все члены, содержащие произведения степеней z_1 и z_2 с одинаковой суммой показателей, равной n, расположим эти группы по возрастанию n, а затем умножим и разделим их на $\frac{1}{n!}$:

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.$$

2. Разложение в ряды $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Заменив в формуле (32.50) x на $-x$ (это означает просто изменение обозначения), получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{32.53}$$

Сложив и вычтя равенства (32.50) и (32.53), а затем деля их на 2, получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{32.54}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{32.55}$$

В правых частях этих формул в силу единственности разложений функций в степенные ряды стоят ряды Тейлора соответственно функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

Поскольку функция e^z определена для всех комплексных значений аргумента z, то на существенно комплексные значения аргумента можно распространить и гиперболические функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$, положив

$$\operatorname{ch} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in C.$$

Определенные таким образом функции $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ для комплексных z раскладываются в степенные ряды (32.54) и (32.55) (в которых вместо x надо написать z), сходящиеся на всей комплексной плоскости.

3. Разложение в ряды $\sin x$ и $\cos x$. Формула Эйлера. Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. п. 11.1), поэтому $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ для всех действительных x. Согласно теореме 7 отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд на всей действительной числовой оси. Вспомнив формулу Тейлора для синуса (см. п. 14.2), получим для него ряд Тейлора

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{32.56}$$

Рассуждая аналогично для $\cos x$ и вспоминая его формулу Тейлора, получим

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \tag{32.57}$$

В силу первой теоремы Абеля ряды, стоящие в правых частях формул (32.56) и (32.57), сходятся на всей комплексной плоскости. Это позволяет распространить синус и косинус на комплексные значения аргумента, положив для любого комплексного z

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{32.58}$$

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{32.59}$$

В комплексной области легко установить связь между показательной и тригонометрическими функциями. Заменив z в ряде (32.51) сначала на iz, а затем на $-iz$, получим

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \qquad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{32.60}$$

Заметив, что $i^{2k} = (-1)^k$ и, следовательно, $i^{2k+1} = (-1)^k i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, из (32.60) получим

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Сравнив эти формулы с (32.58) и (32.59), видим, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in C. \tag{32.61}$$

В силу определения $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ для комплексных значений переменной z (см. выше) формулы (32.61) можно записать в виде

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \qquad \operatorname{sh} iz = i \sin z.$$

Таким образом, в комплексной области $\cos z$ может быть получен из функции $\operatorname{ch} z$ с помощью замены переменной $z = i\zeta$, а функция $\sin z$ — из $\operatorname{sh} z$ той же заменой и делением на i:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} i\zeta = \cos \zeta, \qquad \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} i\zeta = i \sin \zeta.$$

Из формул (32.61) непосредственно следует также формула

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}. \tag{32.62}$$

Формулы (32.61) и (32.62) называются *формулами Эйлера*. Они, конечно, справедливы и для действительных значений z.

Если в формуле (32.62) $z = \varphi$ — действительное число, то

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \tag{32.63}$$

Отсюда следует, что модуль комплексного числа вида $e^{i\varphi}$, $\varphi \in R$, равен 1:

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1.$$

Из формулы (32.63) следует также, что комплексное число z с модулем r и аргументом φ, т. е. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}.$$

Положив здесь $r = 1$, $\varphi = \pi$ и, следовательно, $z = -1$, получим

$$e^{i\pi} = -1$$

— удивительную формулу, открытую Эйлером, устанавливающую связь между числами -1, π, i и e. Удивительную потому, что эти числа были открыты математиками при изучении весьма далеких друг от друга задач: число -1 появилось тогда, когда было понято, что при введении отрицательных чисел операция вычитания приобретает смысл для любой упорядоченной пары натуральных чисел (кроме того, отрицательные числа оказались удобными при сравнении температур тел с температурой замерзания воды, при измерении высот и низин на земле относительно уровня моря и т. п.); число π является отношением длины окружности к диаметру, мнимая единица i дает возможность решать любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, а число e представляет собой такое основание показательной функции, при котором с ней совпадает ее производная.

Поэтому не удивительно, что в городе Кингстоне в Канаде на фасаде главного здания Королевского университета можно увидеть огромную формулу Эйлера: $e^{\pi i} = -1$.

Из формулы (32.63) следует неожиданное, на первый взгляд, свойство функции e^z — она оказывается периодической на комплексной плоскости и ее период равен $2\pi i$. Действительно, так как

$$e^{2\pi i} \underset{(32.63)}{=} \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

то для любого z имеем

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z.$$

Отсюда следует, что обратная к функции e^z функция, обозначаемая $\ln z$ и определяемая равенством $e^{\ln z} = z$, является в комплексной области многозначной функцией.

Имея для комплексного переменного понятие экспоненциальной функции e^z и логарифмической функции $\ln z$, можно для любых комплексных чисел z и w определить степень w^z по формуле

$$w^z = e^{z \ln w}.$$

Упражнение. Доказать, что все значения i^i являются действительными числами.

Из того, что функция e^z имеет период $2\pi i$, вытекает, что функции $\cos z$ и $\sin z$ остаются периодическими с периодом 2π и для комплексных значений аргумента:

$$\cos(z + 2\pi) \underset{(32.61)}{=} \frac{e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Аналогично $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $z \in C$.

Замечание. Понятие функции комплексной переменной бывает полезно использовать и при изучении функций действительного аргумента, принимающих только действительные значения. Покажем это

на примере вычисления интеграла $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$. Применив формулу Эйлера

$$\sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

получим

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{1}{2i}\int e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx - \frac{1}{2i}\int e^{(\alpha-i\beta)x}\,dx =$$

$$= \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{2i(\alpha+i\beta)} - \frac{e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i(\alpha-i\beta)} + C =$$

$$= \frac{\alpha e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) - i\beta e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})}{2i(\alpha^2+\beta^2)} + C =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C$$

(ср. с вычислением этого интеграла в п. 22.4).

4. Разложение в ряд $\ln(1+x)$. Согласно формуле Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x), \quad x > -1.$$

Запишем остаточный член $r_n(x)$ этой формулы в виде Лагранжа. Так как

$$(\ln(1+x))^{(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},$$

то

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1$$

(θ, как всегда, зависит от x и от n).

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 < \frac{1}{1+\theta x} \leqslant 1$. Поэтому $|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{32.64}$$

Если же $-1 < x < 0$, то запишем остаточный член $r_n(x)$ в виде Коши:

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\,x^{n+1}.$$

Здесь $x = -|x|$ и поэтому

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1,$$

ибо в числителе дроби $\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}$ из 1 вычитается большее число, чем в знаменателе: $\theta|x| < \theta$. Кроме того,

$$\frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|},$$

ибо $\theta|x| < |x|$. Поэтому при $x \in (-1, 0)$ имеем

$$|r_n(x)| = \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \frac{1}{|1+\theta x|}\,|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

и так как $|x| < 1$, то и здесь

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \quad -1 < x < 0. \tag{32.65}$$

Из (32.64) и (32.65) следует, что для всех $x \in (-1, 1]$ справедливо разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \tag{32.66}$$

При $x = -1$ этот ряд расходится, так как его члены только знаком минус отличаются от членов гармонического ряда, который, как мы знаем, расходится. Расходится ряд, стоящий в правой части формулы (32.66), и при всех x, больших по абсолютной величине единицы, так как в этом случае последовательность его членов не стремится к нулю; более того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \infty, \quad |x| > 1.$$

Если воспользоваться второй теоремой Абеля (п. 32.1), отмеченной звездочкой, как необязательной при сокращенной программе, то разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд можно получить косвенным, но более коротким путем. Рассмотрим следующий ряд, представляющий собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad |x| < 1. \tag{32.67}$$

Ряд в правой части равенства сходится равномерно на любом отрезке $[-q, q]$, $0 < q < 1$. Это следует, например, из признака Вейерштрасса, ибо при $|x| \leqslant q$ выполняются, очевидно, неравенства $|(-1)^n x^n| \leqslant q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится.

Из равномерной сходимости ряда (32.67) вытекает, что его можно почленно интегрировать от 0 до $x \in (-1, 1)$ (теорема 8 из п. 31.4). Выполнив это интегрирование, получим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

или, записав правую часть с помощью знака суммирования,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n.$$

При этом, согласно указанной теореме, ряд в правой части этого равенства сходится на интервале $(-1, 1)$, а по признаку Лейбница (теорема 9 из п. 30.5) он сходится и в точке $x = 1$. Следовательно, согласно второй теореме Абеля (теорема 3* из п. 32.1), сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Но так как функция $\ln(1 + x)$ также непрерывна на этом отрезке, а на интервале $(-1, 1)$ совпадает с суммой рассматриваемого ряда, то, устремив x к 1, получим, что функция $\ln(1 + x)$ и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ совпадают и при $x = 1$. Таким образом, мы снова пришли к разложению функции $\ln(1 + x)$ в степенной ряд на промежутке $(-1, 1]$ (см. (32.66)).

5. Разложение в степенной ряд степени бинома $(1 + x)^\alpha$. Формула Тейлора для функции $(1 + x)^\alpha$ имеет вид

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + r_n(x), \quad x > -1. \quad (32.68)$$

Соответствующий ряд, называемый *биномиальным рядом с показателем* α, имеет вид

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n. \quad (32.69)$$

Если α является натуральным числом, то этот ряд содержит лишь конечное число членов, не равных 0, и превращается в известную формулу бинома Ньютона

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} C_\alpha^n x^n.$$

Будем предполагать, что α не является натуральным числом и что $x \neq 0$, тогда все члены ряда (32.69) не равны 0. Исследуем его абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера. Положив

$$u_n = \left| \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n \right|,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - n|}{n + 1} |x| = |x|.$$

Следовательно, ряд (32.69) абсолютно сходится при $|x < 1$ и, поскольку этот ряд степенной, расходится при $|x| > 1$.

Докажем, что суммой ряда (32.69) на интервале $(-1, 1)$ является функция $(1 + x)^\alpha$. Для этого исследуем остаточный член $r_n(x)$ в формуле Тейлора (32.68), записав его в виде Коши. Поскольку

$$[(1 + x)^\alpha]^{(n+1)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)(1 + x)^{\alpha - n - 1},$$

то

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Положим

$$a_n(x) = \frac{(\alpha-1)[(\alpha-1)-1]...[(\alpha-1)-n+1]}{n!}x^n,$$

$$b_n(x) = \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad c_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

тогда

$$r_n(x) = a_n(x)b_n(x)c_n(x), \quad n = 1, 2, ... \tag{32.70}$$

Сомножитель $a_n(x)$ является членом биномиального ряда с показателем $\alpha - 1$, и так как выше было показано, что любой биномиальный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0. \tag{32.71}$$

Далее, из неравенств

$$1 - |x| < 1 - \theta|x| \leqslant 1 + \theta x \leqslant 1 + \theta|x| < 1 + |x|,$$

где $-1 < x < 1$, следует, что значения $|b_n(x)|$ заключены между числами $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}$ и $|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$, не зависящими от n, т. е. последовательность $\{b_n(x)\}$ ограничена при каждом $x \in (-1, 1)$.

Что же касается последовательности $\{c_n(x)\}$, то она ограничена равномерно на всем интервале $(-1, 1)$:

$$|c_n(x)| = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \leqslant \left(\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right)^n < 1.$$

В результате из (32.70) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

а это означает, что на интервале $(-1, 1)$ имеет место разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{32.72}$$

Сходимость ряда, стоящего в правой части равенства, в точках $x = -1$ и $x = 1$ требует дополнительного исследования. Можно показать, что в точке $x = 1$ при $\alpha > -1$ биномиальный ряд сходится, а при $\alpha \leqslant -1$ расходится. В точке $x = -1$ при $\alpha \geqslant 0$ он абсолютно сходится, а при $\alpha < 0$ расходится. При этом, согласно второй теореме Абеля, всякий раз, когда биномиальный ряд (32.69) сходится, его сумма равна $(1+x)^\alpha$.

Иногда для получения разложения функции в степенной ряд вместо оценки остаточного члена в формуле Тейлора проще воспользоваться каким-либо уже известным разложением и из него с помощью

общих теорем о функциональных рядах получить искомое разложение. Поясним сказанное на нижеследующем примере.

6. Разложение $\operatorname{arctg} x$. Найдем производную $\operatorname{arctg} x$ и разложим ее в степенной ряд по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \tag{32.73}$$

Ряд, стоящий в правой части равенства, имеет радиус сходимости $R = 1$, и поэтому его можно почленно интегрировать на интервале $(-1, 1)$:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1. \tag{32.74}$$

Радиус сходимости получившегося ряда также равен 1 (см. теорему 3). Таким образом, функция $\operatorname{arctg} x$ оказалась разложенной в степенной ряд с радиусом сходимости, равным единице. На первый взгляд это представляется несколько неожиданным, так как $\operatorname{arctg} x$ является бесконечно дифференцируемой на всей числовой оси функцией. Это связано с тем, что производная функции $\operatorname{arctg} x$ заведомо не может быть разложена в степенной ряд с радиусом сходимости больше единицы, так как функция $\dfrac{1}{1+z^2}$ обращается в бесконечность при $z = \pm i$.

Важно отметить, что разложение (32.74) справедливо и на концах $x = \pm 1$ интервала сходимости $(-1, 1)$. Действительно, при $x = \pm 1$ ряд, стоящий в правой части равенства (32.74), сходится в силу признака Лейбница, а тогда его сумма $s(x)$, согласно следствию из второй теоремы Абеля (теорема 3* в п. 32.1), непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Таким образом, две непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ функции $\operatorname{arctg} x$ и $s(x)$ совпадают в силу равенства (32.74) на интервале $(-1, 1)$, а тогда они совпадают при $x = \pm 1$, т. е. и при этих значениях x функция $\operatorname{arctg} x$ является суммой ряда, стоящего в правой части равенства (32.74):

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{32.75}$$

При подстановке в разложение функции в ряд какого-либо фиксированного значения переменной получается формула для суммы соответствующего числового ряда. Так, подставив в ряд (32.75) $x = 1$ и заметив, что $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, получим

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

7. Разложение $\arcsin x$. Заметив, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

разложим $(\arcsin x)'$ в ряд по формуле разложения степени бинома (см. 32.72)

$$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}.$$

Радиус сходимости получившегося ряда, как для всякого биномиального ряда, равен единице. Интегрируя получившийся ряд от нуля до x, $|x| < 1$, получим

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

32.5. Формула Стирлинга. Разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд дает возможность легко получить асимптотическую формулу для факториала $n!$ при $n \to \infty$. Эта формула называется *формулой Стирлинга**); она имеет вид

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2}}{e^n}, \quad n \to \infty, \tag{32.76}$$

т. е. отношение $n!$ к выражению, стоящему в правой части этой формулы, стремится к 1 при $n \to \infty$.

▷ Действительно, если $|x| < 1$, то

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Положив $x = \dfrac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, получим

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} =$$

$$= \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right) > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

откуда

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1.$$

Пропотенцировав и заметив, что функция $\ln x$ возрастает, а $1 = \ln e$, получим

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} > e. \tag{32.77}$$

*) Д. Стирлинг (1692–1770) — шотландский математик.

Положим
$$x_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+1/2}}. \tag{32.78}$$
Поскольку, согласно неравенству (32.77),
$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2} > 1,$$
то последовательность $\{x_n\}$ убывает. Кроме того, она ограничена снизу: $x_n \geqslant 0$. Следовательно, она имеет конечный предел. Обозначим его a:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{32.79}$$
Покажем, что $a \neq 0$. Так как
$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\,\frac{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12n(n+1)},$$
то
$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$
и, следовательно,
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2} < e^{1+1/(12n(n+1))}.$$
Поэтому
$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2} < e^{1/(12n(n+1))} = \frac{e^{1/(12n)}}{e^{1/(12n(n+1))}},$$
т. е.
$$x_n e^{-1/(12n)} < x_{n+1} e^{-1/(12n(n+1))}. \tag{32.80}$$

Последовательность $y_n = x_n e^{-1/(12n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, будучи произведением двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{e^{-1/(12n)}\}$, имеющих предел, также имеет предел, причем
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} e^{-1/(12n)} \underset{(32.79)}{=} a.$$

Неравенство (32.80) означает, что последовательность $\{y_n\}$ возрастает, поэтому $y_n < a$, а так как $y_n > 0$, то доказано, что $a > 0$.

Из равенства (32.79) следует, что
$$x_n = a(1+\varepsilon_n), \tag{32.81}$$
где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Подставив (32.81) в (32.78), получим
$$n! = a\,\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\,(1+\varepsilon_n). \tag{32.82}$$

Для того чтобы найти значение числа a, вспомним, что по формуле Валлиса (см. (26.9) в п. 26.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2. \tag{32.83}$$

Из формулы (32.82) следует, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \underset{(32.82)}{=} a\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Подставив это выражение в формулу Валлиса (32.83), получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\, a^2\, \frac{n}{2}\, \frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4}, \tag{32.84}$$

откуда $a = \sqrt{2\pi}$. Следовательно,

$$n! \underset{(32.82)}{=} \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\,(1+\varepsilon_n), \qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0,$$

т. е. формула Стирлинга (32.76) доказана. $\triangleleft$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

КУДРЯВЦЕВ Лев Дмитриевич

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. РЯДЫ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Корректор *Л.Т. Варьяш*
Иллюстрации *А.А. Логунова*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*
Оригинал-макет *Н.Л. Ивановой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 15.12.04.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 28,6. Заказ №

Издательская фирма “Физико-математическая литература”
МАИК “Наука/Интерпериодика”
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru; http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0184-6

